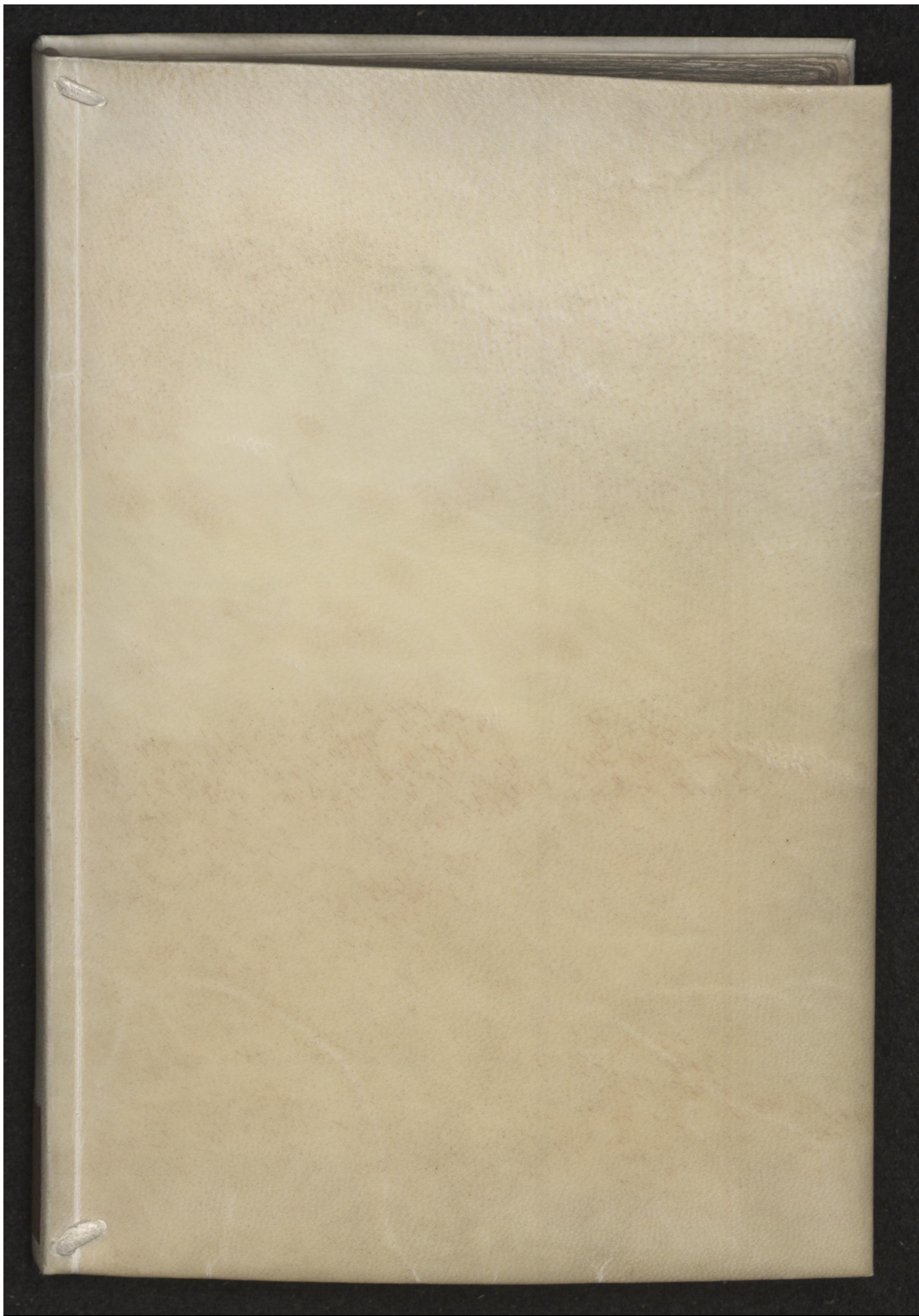
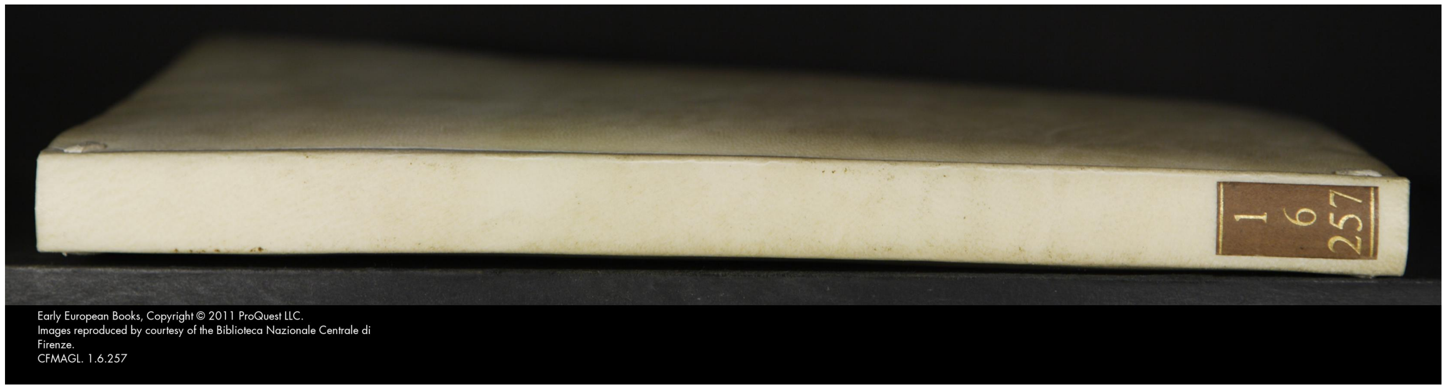
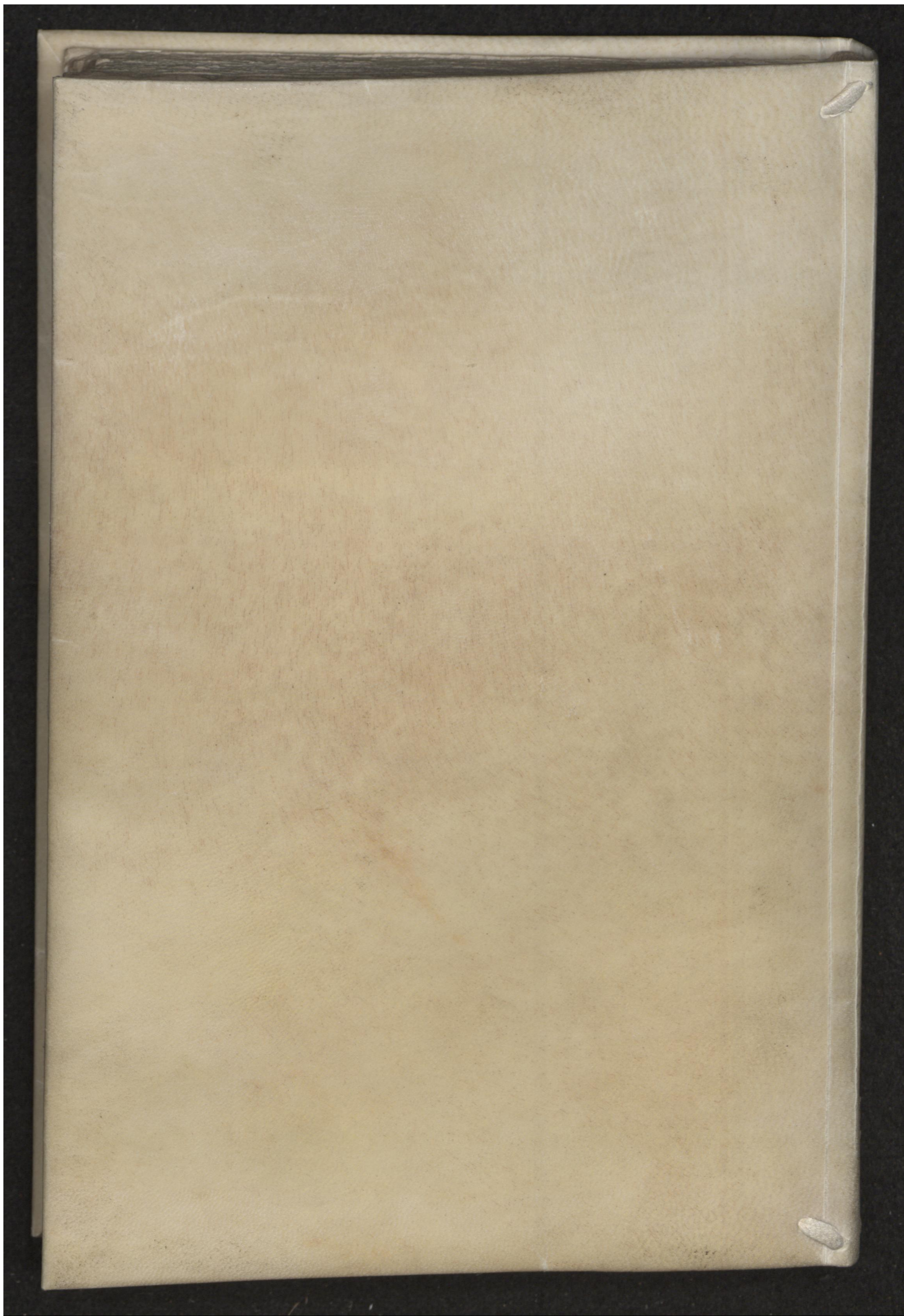
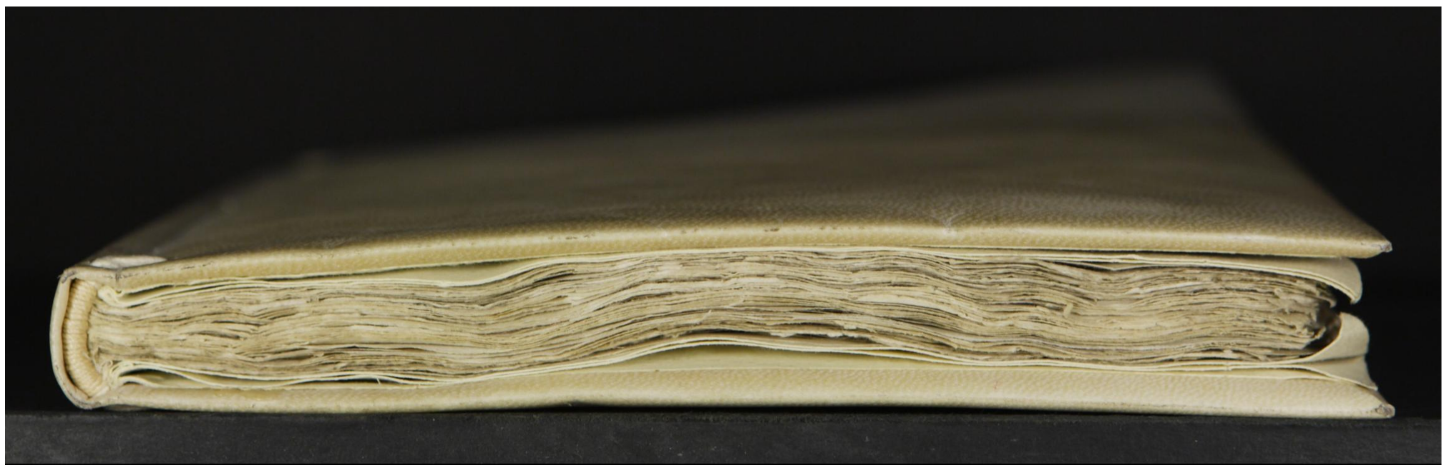


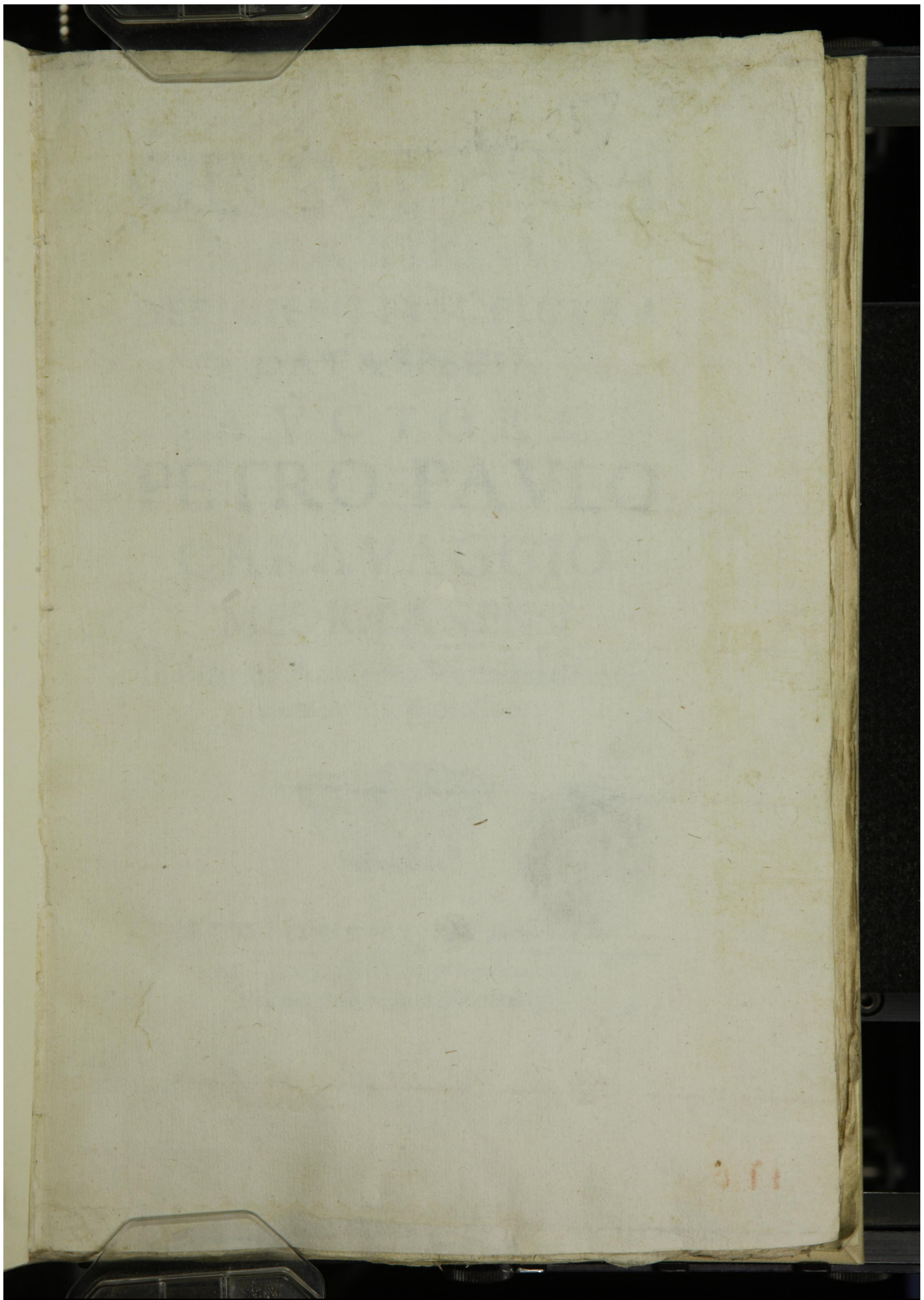

1
6
257

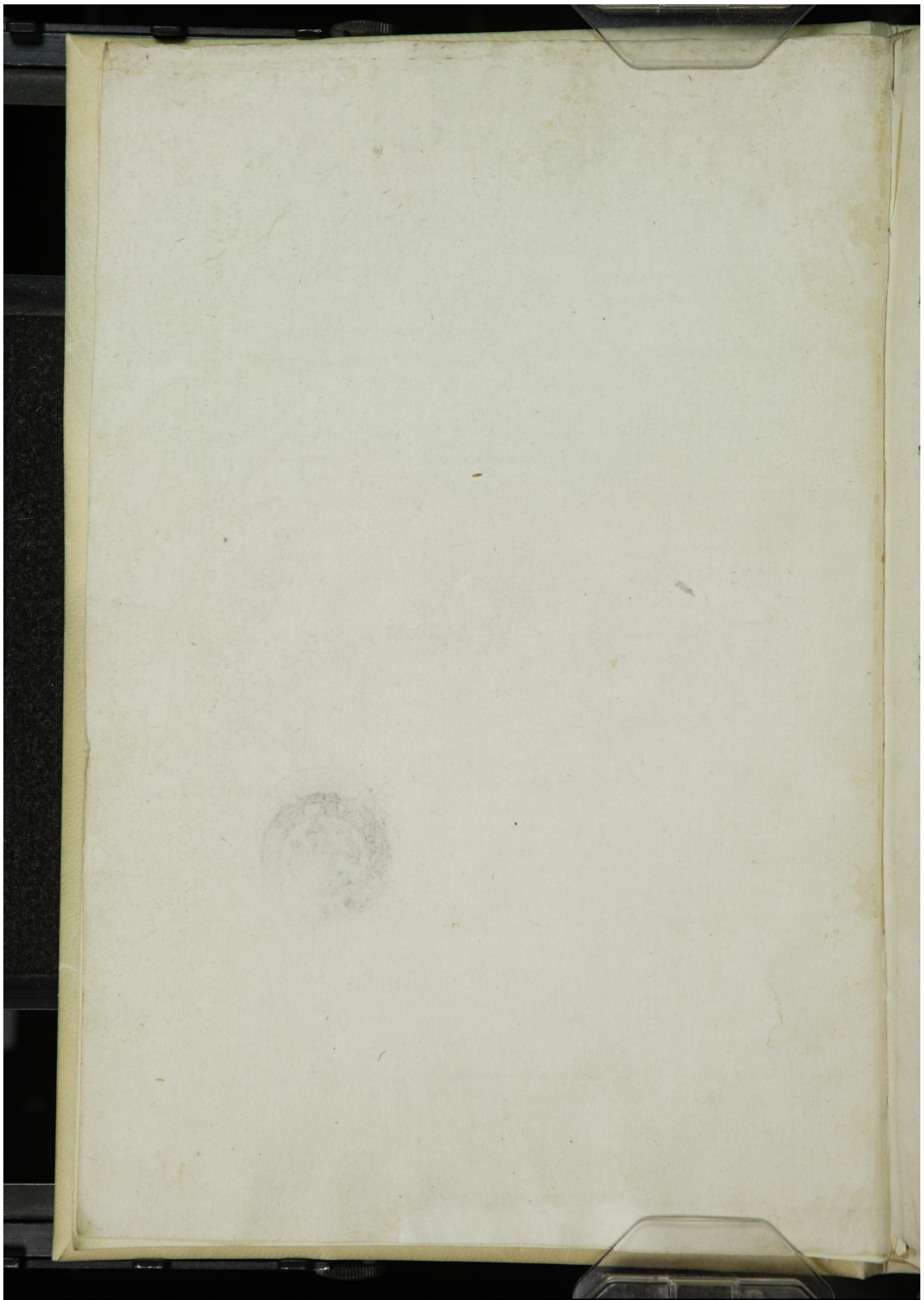












GEOMETRIA
APPLICATIONVM DEFICIENTIVM FIGVRA DATA SPECIE.

AVCTORE
PETRO PAVLO CARAVAGGIO MEDIOLANENSI

In Palatina Academia Mathematicarum ſcientiarum profeſſore.





MEDIOLANI, M.DC.LIX.

Ex Typographia Archiepiſcopali.
Per Bartholomæum Bidellium.

Ad Adm. R. D. Cæſarem Zoccum vt videat, & vbi nihil obſtet, probet Inquiſitor Mediolani.

OPus hoc, cui inſcribitur Geometria applicationum deficientium &c. Auctore Domino Petro Paulo Carauaggio Mediolanenſi in Palatina Academia meritiſſimo, ac peritiſſimo Mathematicarum profeſſore, Ego P. Cæſar Zocchus Rector S. Ambroſij in Solariolo de mandato Reuerendiſsimi Inquiſitoris perlegi, & typis dignum iudicaui. In quorum fidem.

Ità eſt P. Cæſar Zocchus qui de mandato vt ſup.

Imprimatur Fr. Petrus Hyacinthus Donnellius Magiſter, & Inquiſitor Mediolani.

Io. Paulus Mazuchellus pro Illuſtriſsimo, & Reuerendiſs. D. D. Archiepiſcopo.

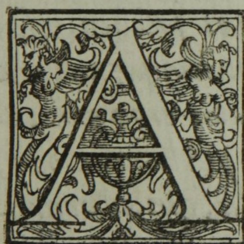
Franciſcus Arbona pro Excellentiſſimo Senatu.



EXCELLENTISSIMO SENATVI MEDIOLANENSI.



PETRVS PAVLVS CARAVAGGIVS F.



VT me suscepti operis amor fallit, aut vestro Amplissimi Patres iuditio, ob delatum publicè Mathematicas profitendi munus nimium mihi blanditus inani persuasione ducor, vt credam hæc qualiacunq; non esse prorsus indigna, quæ sacrario vestro sistantur: Nam cum vnica mihi cura sit, relictis protritis, ac peruulgatis ea indagare, quæ misero scientiarum fato in Veterum monumentis desiderantur, & in quibus præclara Illustrium huius æui Mathematicorum ingenia se exercuisse non noui; Et

licet

licet eorum decus omne aßequi non potuerim, non improbè tamen ſperare poßum futurum hic aliquid, quod ſtudioſorum vota non in totum eludat; Nam vt alia omittam inſtitutus labor proderit ſaltem, ad clariorem reddendum vſum inſtauratæ à ſummis viris antiquorum Analyſis. Hæc certa, & indubitata ratiocinandi lex nos in ipſa Mathematicarum penetralia inducit, ac ſublimioribus commentationibus viam aperit: quodq; caput eſt nouarum propoſitionum inueniendarum cupidos Geometrarum libros verſandi tædio, ac veluti ergaſtulo liberat.

Has commentationes publici iuris facere in veſtro ampliſſimo nomine auſus ſum. Nam, cum vita vltra ſtatutos æui terminos prorogari non poſſit adnitendum eſt, vt aliquid ſuperſit, propter quod nos vixiſſe, nec pudeat, nec pæniteat. Neque felicioribus auſpicijs hæ facultates principes publico vſui inſeruire poßunt, aut debent. Id vnicum pignus erit obſeruantiæ meæ, aut potius pietatis erga vos teſtandæ, vt omittam veſtra non in publicam modo, ſed in rem literariam ingentia merita, qui adornandas, atq; augendas diſciplinas, earumq; cultores fouendos nati eſtis. Ita munus veſtrum vobis redditum eo, apud quos natum, atq; eductum; ſimul Deum veneror, vt diu talia appendere vobis poſſim, ac perpetuæ veſtræ felicitatis voto damnari. Valete.

ISAGOGE.



ARS ea Matheseos, quæ iactis communium Elementorum fundamentis sublimior, ac plena Maiestatis exurgit, & prope perfecti operis fastigium extollit; dum scilicet vim, & facultatem vnicuiq; subministrat in Geometricis, atq; Arithmeticis quæcunq; Problemata inueniendi, &, teste Pappo, vocatur locus resolutus, inuenta, ac comparata in superbi illius Problematis gratiã, NVLLVM PROBLEMA NON SOLVERE, deficiens, & quodamodo manca esset, nisi quando Problemata fieri possent, determinatio indicaret; si quidem omnis cura, atq; opera frustra esset, si ea, quæ inueniri non possunt, inuestigarentur.

Cum igitur locorum variæ sint species; alij enim plani, alij solidi, alij lineares dicuntur; & vniuscuiusq; speciei gradum determinet applicatio magnitudinis datæ magnitudini cum defectu simili figuræ datæ, quæ contineat magnitudinem applicatæ magnitudini homogeneam. Plani enim loci gradum determinat applicatio ad datam rectam lineam plani deficientis parallelogrammo simili dato; solidi loci gradum determinat applicatio solidi ad datam lineam, vel planum datum, cum defectu parallelepipedi similis dato; Linearium verò locorum maiorem lineæ virtutem ostendit, quo altius denominatur magnitudo applicata cũ homogeneo defectu; quam denominationem nos ex Arithmeticis in Geometriam transferemus homoge-

5

neis in eodem gradu constitutis; latere scilicet cum radice; plano cum quadrato; solido cum cubo; plano plano, cum quadrato quadrato; plano solido, cum quadrato cubo; solido solido, cum cubo cubo; & sic vlterius procedendo; seruata Analystarum Methodo Diophantea, quod antiquos fecisse non noui, aut si factum est misero scientiarum fato cum pluribus alijs est deperditum; ea enim, qnæ ex ipsorum monumentis ad nos peruenerunt ad Geometriam spectantia in trina solidi dimensione terminantur, non altius ascendendo. Quamobrem plani tantum ad datam lineam applicatio deficientis parallelogrāmo simili dato, & solidi ad datam lineam applicatio cum defectu parallelepipedi similis dato determinata in Antiquorum monumentis reperitur. Prima in datæ lineæ bisectione maxima demonstratur ab Euclide lib. 6. prop. 27.; & secunda in trisectione ab Eutocio in Archimedē de Sphera, & Cylindro, prop. 3., & à Bonauentura Caualerio; sed cum hic vsus sit methodo suæ Geometriæ indiuisibilibus continuatæ; & Eutocius id præstiterit ope conicarum sectionum, quarum vsus nonnullis non arridet, vt Geometricus; ideò nos addemus ijs, qui nos præcesserunt, vt hanc etiam solidi applicationem in trisectione datæ lineæ maximam Geometricè determinemus, nullis adhibitis ad demonstrationem Conicis sectionibus, sed solis Euclideis postulatis, adhibita scilicet tantum linea, & circulo; in hoc Geometriam promouentes, amplius illam promoturi in applicationibus altiorum graduum, quod in ipsis maximum sit determinando; demonstrantes quemlibet

bet gradum, vt maxima fiat applicatio tot requirere datæ magnitudinis ſectiones, quotus ipſe eſt in ordine graduum; ita vt plano plani, quod quartum in magnitudinum ſerie gradum obtinet, applicatio cum homogeneo defectu, vt maxima ſit, requirat magnitudinem, cui applicatur quadrifariam ſecari: Plano ſolidi verò applicatio cum homogeneo defectu requirat quintufariam ſecari, cum plano ſolidum quintum obtineat gradum in ſcala magnitudinum, & ſic in infinitum. Et tunc cum maguitudo lineæ applicabitur accidet maxima applicatio ad vnam dictarum partium; cum verò applicabitur gradui altiori, tunc maxima applicatio continget in tot partibus datæ magnitudinis, cui fit applicatio, quota ipſa eſt in ordine graduum, diuiſæ in tot partes, quota eſt applicanda magnitudo in ordine graduum; ideſt magnitudinis, cui fit applicatio partes denominabit numerus graduum magnitudlnis applicandæ; numerabit verò numerus graduum magnitudinis, cui fit applicatio. Hoc locupletemus exemplo. Applicandum ſit ſolido ſolidum plano plano, cum defectu cubi cubi, inueſtigandumq; quodnam maximum futurum ſit, quod applicari poſſit, exurget illud fore omnium maximum, quod diuiſo plano plano in ſex partes applicabitur ipſius plano plani quatuor partibus; cum applicandum ſit ſolido ſolidum, quod in ordine magnitudinum ſextum gradum obtinet, & plano planum, cui fit applicatio in ordine magnitudinum obtineat quartum gradum, & reliquum occupabit defectus figuræ homogeneæ ſimilis datæ ſeruato ordine ſequenti.

Maximum planum, quod applicatur datæ lineæ deficiens parallelogrammo ſimili dato eſt id, quod applicatur dimidio datę lineæ; parallelogrammum ſimile dato deficiens adiacet alteri dimidio.

Maximum ſolidum, quod applicatur datæ lineæ deficiens ſolido ſimili dato eſt id, quod applicatur datæ lineæ tertiæ parti; ſolidum ſimile dato deficiens adiacet reliquis duabus tertijs partibus.

Maximum ſolidum, quod applicatur dato plano deficiens ſolido ſimili dato eſt id, quod applicatur dati plani duabus ex tribus partibus; & ſolidum ſimile dato deficiens adiacet reliquæ tertiæ parti.

Maximum plano planum, quod applicatur datæ lineæ deficiens plano plano ſimili dato eſt id, quod applicatur datæ lineæ parti quartæ; & plano planum ſimile dato deficiens adiacet reliquis tribus ex quatuor partibus.

Maximum plano planum, quod applicatur dato plano deficiens plano plano ſimili dato eſt id, quod applicatur dati plani duabus ex quatuor partibus, ideſt dimidio; & plano planum ſimile dato deficiens adiacet reliquis duabus ex quatuor partibus, ideſt dimidio.

Maximum plano planum, quod applicatur dato ſolido deficiens plano plano ſimili dato eſt id, quod applicatur dati ſolidi tribus ex quatuor partibus; & plano planum ſimile dato deficiens adiacet reliquæ quartæ parti.

Maximum plano ſolidum, quod applicatur datæ lineæ deficiens plano ſolido ſimili dato eſt id, quod applicatur datæ lineæ quintæ parti; & plano ſolidum

ſimile

ſimile dato deficiens adiacet reliquis quatuor ex quinque partibus.

Maximum plano ſolidum, quod applicatur dato plano deficiens plano ſolido ſimili dato eſt id, quod applicatur dati plani duabus ex quinque partibus; & plano ſolidum ſimile dato deficiens adiacet reliquis tribus ex quinque partibus.

Maximum plano ſolidum, quod applicatur dato ſolido deficiens plano ſolido ſimili dato eſt id, quod applicatur dati ſolidi tribus ex quinq; partibus; & plano ſolidum ſimile dato deficiens adiacet reliquis duabus ex quinque partibus.

Maximum plano ſolidum, quod applicatur dato plano plano deficiens plano ſolido ſimili dato eſt id, quod applicatur dati plano plani quatuor ex quinq; partibus; & plano ſolidum ſimile dato deficiens adiacet reliquæ quintæ parti.

Et ſic procedendo.

Sed cum ſuperius me ex Arithmeticis in Geometriam magnitudinum denominationes transferre dixerim, qua lege id faciam, quomodo Arithmeticam Geometriæ conciliem Iſagogis loco docebo.

Apud Arithmeticos poſita numerorum continue proportionalium ſerie ab vnitate incipientium, primus ab vnitate dicitur radix, ſecundus quadratus, tertius cubus, quartus quadrato quadratus, quintus quadrato cubus, ſextus cubo cubus, & ſic in infinitum, ſeruata denominandi Methodo Diophantea in exponentium additione. Non incongruum igitur erit ſimiliter in Geometria, poſita linearum ſerie proportionali-

tionaliter continue procedentium, si prima ponatur loco vnitatis, secunda dicatur Analoga radici, tertia quadrato, quarta cubo, quinta quadrato quadrato, & sic vlterius procedendo. Quia vt quadratum primæ ad quadratum secundæ, ita prima ad tertiam; & vt cubus primæ ad cubum secundæ, ita prima ad quartam; & vt quadrato quadratum primæ ad quadrato quadratum secundæ, ita prima ad quintam; & eadem Methodo vlterius procedendo. Non aliter, ac numerorum quadrata metitur vnitatis quadratum, toties, quot vnitates sunt in illo proportionali numero, qui tertius est incipiendo ab vnitate, & continuando rationem vnitatis ad latus quadrati; seu ad quem vnitas habet duplicatam rationem eius, quam habet ad latus quadrati. Numerorum cubos metitur vnitatis cubus toties, quot vnitates sunt in illo proportionali numero, qui quartus est, incipiendo ab vnitate, & continuando rationem vnitatis ad latus cubi, seu ad quem vnitas habet triplicatam rationem eius, quam habet ad latus cubi. Numerorum quadrato quadrata metitur vnitatis quadrato quadratum, toties, quot vnitates sunt in illo proportionali numero, qui quintus est, incipiendo ab vnitate, & continuando rationem vnitatis ad latus quadrato quadrati; seu ad quem vnitas habet quadruplicatam rationem eius, quam habet ad latus quadrato quadrati; & sic deinceps.

Posita igitur quotcunq; linearum continuè proportionalium serie A B C D E, & prima gerat vicem vnitatis, reliquæ reliquis magnitudinibus

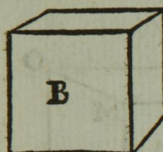
A B C D E

homo-

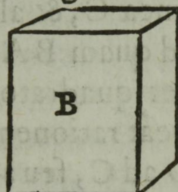
homologæ erunt; euadet igitur reliquarum magnitudinum latus, seu radix B, cuius quadrato homologa erit C, & cubo D, & quadrato quadrato E.

Effingatur enim ex ipsa B quadratum; vt A ad C, ita erit A quadratum ad B quadratum; facto deinde B cubo, erit vt A ad D, ita A cubus ad B cubum; seu, vt B ad C,

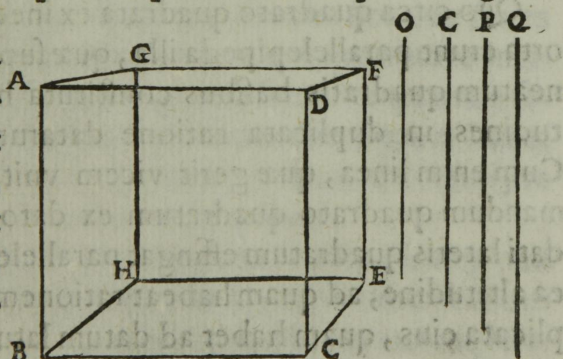




ita B quadratum ad B cubum; & similiter B cubus erit ad B quadrato quadratum, vt C ad D, seu, vt A ad B; si verò B cubi altitudo formetur in ratione A ad B ortum erit parallelepipedum, quod refert magnitudinem quadrato quadrati, quale est parallelepipedum B; si huius iterum vltimi parallelepipedi altitudo ad aliam altitudinem referatur, manente eadem basi, in eadem ratione A ad B exurget quadrato cubus &c.; & hæ magnitudines augebuntur, si ratio A ad B erit minoris ad maius, & minuentur si maioris, ad minus, vt patet.

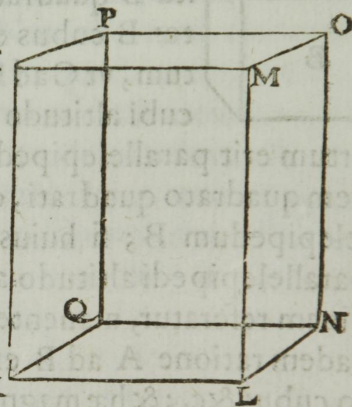


Sit igitur data quæcunq; recta C, ex qua effingendum sit quadrato quadratum; constituēda prius erit aliqua linea, quæ se habeat loco vnitatis; sit v. g. O, & sicuti O se habet ad



ad C, ita C fiat ad aliam v. g. P, ex qua vti altitudine constituatur parallelepipedum habens pro base ipsius C quadratum; hoc parallelepipedum refert quadrato quadratum quęsitũ, quale est parallelepidedum A B C D E F G H, cuius basis est quadratũ B E ex latere B C equale lateri C, & altitudo B A, ad quam C habet eam rationem, quam habet O ad C.

Si verò sit constituendus quadrato cubus fiet parallelepipedum I K L M N O P Q, cuius basis sit quadratum K N æquale quadrato lineæ C, & altitudo sit I K, ad quam B A altitudo scilicet quadrato quadrati habeat rationem, quam habet O ad C, seu ad quam C habeat duplicatam rationem eius, quam habet O ad C, idest sint continuè proportionales O & C, & B A, & I K: eodem modo de reliquis denominatis magnitudinibus erit disserendum.



Quo circa quadrato quadrata ex inequalibus lineis orta erunt parallelepipeda illa, quæ super datarum linearum quadratis basibus constituta habebunt altitudines in duplicata ratione datarum linearum: Cum enim linea, quæ gerit vicem vnitatis ad efformandum quadrato quadratum ex dato latere, super dati lateris quadratum effingat parallelepipedũ, cum ea altitudine, ad quam habeat rationem, quæ sit duplicata eius, quam habet ad datum latus; habebit ad

b vtriusq;

vtriusq; quadrato quadrati altitudinem duplicatam rationem eius, quam habet ad ipsarum basium latera; quare quadrato quadratorum altitudines inter se erunt in duplicata ratione laterum suarum basium. Si enim sint duæ series continue proportionalium ab eadem quantitate incipientium, habebit tertia primæ seriei ad tertiam secundæ seriei duplicatam rationem eius, quam habet secunda primæ seriei ad secundam secundæ seriei; vt in lẽmate secundo demonstrabimus.

Similiter quadrato cubi ex inæqualibus lineis orti erunt parallelepipeda illa, quæ super datarum linearum quadratis basibus constituta habebunt altitudines in triplicata ratione datarum linearum; nam cum linea, quæ gerit vicem vnitatis, ad efformandum quadrato Cubum ex dato latere, super dati lateris quadratum effingat parallelepipedum cum ea altitudine, ad quam habeat rationem, quæ sit triplicata eius, quam habet ad datum latus, habebit ad vtriusq; quadrati Cubi altitudinem triplicatam rationem eius, quam habet ad ipsarum basium latera; quare quadrato Cuborum altitudines inter se erunt in triplicata ratione laterum suarum basium. Si enim sint duæ series continuè proportionalium ab eadem quantitate incipientium, habebit quarta primæ seriei ad quartam secundæ seriei triplicatam rationem eius, quam habet secunda primæ seriei ad secundam secundæ seriei, vt in lemmate secundo demonstrabimus.

Et ex his facili negotio apparet similia plano plana esse illa parallelepipeda, quæ super similibus basibus cõstituta, habent altitudines in duplicata ratione late-

rum homologorum ſimiliũ baſium;& ſimilia plano ſolida eſſe illa parallelepipeda, quæ ſuper ſimilibus baſibus conſtituta habent altitudines in triplicata ratione laterum homologorũ ſimilium baſium; & ſemper iuxta numerũ graduum, ad quem aſcendit magnitudo denominata vltra ſolidum, totuplicem eſſe rationem altitudinum rationis laterum homologorum ſimilium planorum, ſuper quibus cõſtructa erunt parallelepipeda.

His præmiſſis, vt tranſeamus ad applicationes magnitudinis magnitudini cum homogeneo defectu ſimili figuræ datæ, hoc nihil aliud erit, quam ita ſecare magnitudinem datam, cui fieri debet applicatio, vt ſi ex altero ſegmento gignatur figura ſimilis datæ, quæ defectura ſit, quod fit ex ortiuo latere in reliquum datæ magnitudinis ſegmentum æquetur applicandæ magnitudini; ortiui autem lateris nomine non tantum lineam, ſed etiã ſuperficiem intelligo. Si enim datæ lineæ applicandum ſit ſolidũ ſolido æquale deficiens Cubo, vel quocunq; ſolido parallelepipedo ſimili dato, hoc nihil aliud erit, quam ita datam lineam ſecare, vt ſi ex altera ipſius parte effingatur parallelepipedum ſimile dato, quod ex altera effićti parallelepipedi ſuperficie, tanquam baſi, & reliquo datæ lineæ ſegmento tanquam altitudine effingi poterit parallelepipedum, æquetur ſolido, dato; & in huiuſcemodi caſu latus exurgens eſt ſuperficies. Si vero dato plano applicandum eſſet ſolidum ſolido æquale deficiens Cubo, vel quocunque parallelepipedo ſimili dato, ita ſecandum eſſet planum, vt ſi ex latere alterius ſegmenti in quadratum efformati, vt effingatur Cubus, vel in

paralle-

parallelogrammum ſimile dato, vt ductum in altitudinem ſimilem datæ exurgat parallelepipedum ſimile dato, quod ex hac altitudine in reliquum plani efficietur ſolidum ſit æquale ſolido dato, & in huiuſcemodi caſibus latus exurgens eſt linea.

Cum autem data magnitudo ita ſecari poſſit, vt ſi ex altero ſegmento effingatur figura ſimilis datæ, quod ex ortiuo huiuſce figuræ latere fit in reliquum magnitudinis ſegmentum ſit omnium maximum; noſtrum obiectum erit datæ magnitudinis ſectionem determinare, idq; Geometricè.

Et quia nouam mihi videor eſſe viam ingreſſus operæ pretium me facturum exiſtimaui ſi non ſolum inuenta demonſtrarem Theoremata, ſed Methodum etiam, qua vſus ſum in inueniendo adderem, vt in commune commodum hæc veluti exempla prodirent ad facultatem vnicuiq; comparandam ſimilia, & ſubtiliora excogitandi, ac demonſtrandi; quare in ſingulis propoſitionibus præmittam prius Analyſim Zeteticam, ſeu inuentricem, qua determinatam ſectionem inueni, vbi figura deficiens ſumetur e ſerie ſcalarium magnitudinum; nam planum deficiens erit quadratum, ſolidum deficiens Cubus, plano planum deficiens quadrato quadratum, & ſic de cæteris; cum vt æqualitas laterum in proportionem transferatur ſolum maior opera non peritia requiratur; huic Subdam Poriſticen, qua examinetur inuentum poſito ſolido deficienti ſolido quocunq; ſimili dato, quod tandem ſequetur demonſtratio Synthetica circa ipſas Geometricas magnitudines.

Et quia vnicuiq; lateri, aut figuræ poteſt dari linea homologa; ſi conſtituatur linea, quæ ſe habeat loco vnitatis, poterit etiam dari homologa producto ex altero datæ magnitudinis ſegmento in homologam lateri ortiuo ex applicatione deficientis figuræ reliquo ſegmento, quæ, vt ſit omnium maxima, determinanda erit datæ magnitudinis ſectio, quam determinabimus adhibitis in demonſtrationem, non vt ſuperius ipſis magnitudinibus, ſed lineis proportionalibus, quæ ipſis magnitudinibus homologæ ſint; ita vt in id recidat hęc Methodus, vt poſita linea non ſecta hæc ſe habeat loco vnitatis, & ſimilis ſit ei, quæ ab Euclide dicitur rationalis, cui, vel cuius poteſtati reliquæ comparentur, & magnitudo, cui fieri debet applicatio ita ſecetur, vt ſi alterum ſegmentum fiat ad aliud, vt non ſectæ gradus homogeneus lateri, quod reſultat ex effectione figuræ ſimilis datæ ab altero ſegmento in vnum effingendæ figuræ latus efformato ad idem latus, id, quod reſultat ſit omnium maximum.

Id dilucidemus exemplis. Sit docendum cum Euclide lib. 6. propoſitione 27., maximum planum, quod applicari poſſit lateri dato deficiens quadrato eſſe id, quod ad dimidium dati lateris applicatur; quod idem eſt, ac rectangulum, quod fit ſub dati lateris ſegmentis æqualibus eſſe omnium maximum. Iuxta hanc methodum in id recidet, vt data quadam non ſecta datum latus ea lege ſecetur, vt ſi fiat, vt non ſecta ad vnum ſegmentum, ita alterum ſegmentum ad aliud, id demonſtretur omnium maximum, quod exurget ſi datum latus bifariam ſecetur.

Sit quærendum maximum solidum, quod applicari possit dato lateri cum defectu Cubi, quod esse id, quod applicatur tertiæ parti dati lateris demonstrat Eutocius in Archimedem de Sphera, & Cylindro lib. 2. propositione 3., vbi docet, proposita linea, eaq; secta, ita vt partes sint in ratione dupla, parallelepipedum constructum base quadrato maioris partis, & altitudine minori portione, maximum esse omnium, quæ pariter confici possint ex alia quacunq; sectione eiusdem lineæ. Hac autem methodo in id recidet, vt posita linea non secta datum latus ita secetur, vt si fiat, vt non secta ad alterum segmentum, ita alterius segmenti quadratum ad aliud, hoc doceatur esse omnium maximum, quando segmentum, ex quo fit quadratum est duplum alterius segmenti, vel alterum segmentum est æquale tertiæ parti dati lateris; & vt etiam omnia ad lineas tantum reducantur, iuxta hanc methodum, in hanc formam exprimi poterit. Datis duabus rectis lineis, quarum altera sit non secta, altera vero secta, & alterum segmentum sectæ habeat ad aliam lineam rationem duplicatam eius, quam habet non secta ad alterum segmentum, hanc lineam fore omnium maximam, quando segmentum, ad quod refertur non secta erit æquale duabus tertijs partibus datę rectę.

Sit quærendum maximum solidum, quod applicari possit dato plano cum defectu Cubi, quod à nobis demonstrabitur esse id, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani, idq; Geometricè; vbi, quia defectus debet assimilari Cubo, necesse erit alterum dati plani segmentum in quadratum effingi: quare in id re-

cidet

cidet hæc methodus, vt si fiat, vt data non secta ad similem lateri quadrati dati segmenti, ita similis residuo plani ad aliam, quæ similitudo sit respectu datæ non sectæ vti rationalis; & erit quæ exurget quarto loco proportionalis posita Proportionalium prima non secta, secunda similis lateri quadrati, tertia similis longitudini, quæ oritur ex applicatione reliqui segmenti ad idem latus.

Sed ad hæc, dilucidanda non inutile erit pauca subnectere; hoc est cum superius dixerimus scalaribus magnitudinibus dari posse proportionales rectas lineas homologas in serie continuè proportionalium, quarum prima gerat vicem vnitatis, secunda lateris, seu radicis; hinc colligi posse magnitudinum additioni, aut subductioni respondere solam linearum homologarum additionem, & subductionem, & magnitudinum ductui, & applicationi respondere solam cuiusdam proportionalis inuentionem, quæ duas datas, vti tertia sequatur, aut tres datas vti quarta. Cum enim numerum per numerum multiplicare idem sit, ac reperire numerum, ad quem multiplicatus habeat eam rationem, quam habet vnitas ad multiplicantem; & id circò quatuor fiant numeri proportionales, vnitas, & multiplicans, multiplicatus, & productus; similiter cum ducenda sit Geometrica magnitudo in magnitudinem, & Geometricis magnitudinibus possint exhiberi lineæ homologæ; si determinetur quædam linea, quæ habeat se loco vnitatis, & ponatur prima proportionalium, & secunda proportionalium sit linea alteri magnitudinum ducendarum homologa; & fiat, vt linea

nea posita loco vnitatis ad hanc secundam, ita altera linea homologa alteri Geometricæ magnitudini ad aliam; hæc vltimo locò inuenta similis erit ei, quod fit ductis inter se dictis magnitudinibus. Id doceamus exemplo. Sit ducendum B quadratum in C Cubum; posita linea A quæ se hebeat loco vnitatis, si fiat, vt A ad B latus quadrati ita B ad aliam v. g. D, erit D similis B quadrato; item si fiat, vt A ad C, ita C ad E, & E ad F, erit F similis C Cubo; si tandem fiat, vt A ad D ita F ad aliam, quæ sit G, erit G similis producto ex B quadrato in C Cubum.

In diuisionibus vero numerorum cum sit vt diuisor ad vnitatem, ita diuidendus ad quotientem, vel vt diuisor ad diuidendum, ita vnitas ad quotum. Similiter in applicationibus magnitudinum, cum possint, & applicandis, & ijs, quibus fit applicatio magnitudinibus assignari lineæ homologæ, posita linea rationali, quæ vicem gerat vnitatis; si fiat, vt similis ei, cui fieri debet applicatio, ad eam, quæ similis est applicandæ; ita linea, quæ se habet loco vnitatis ad aliam, exurget similis quoto. Sit applicandus B Cubus C quadrato. Posita linea A pro vnitate, si fiat, vt A ad B, ita B ad D, & D ad E; erit E similis B Cubo; si verò fiat, vt A ad C ita C ad F; erit F similis C quadrato. Si igitur fiat vt F ad E, ita A ad aliam, hæc erit similis latitudini oriundæ ex applicatione B Cubi ad C quadratum.

Et radicum extractioni, quæ quædam species est diuisionis, respondebit inuentio medio loco proportionalium inter duas, quarum prima sit loco vnitatis;

& altera homologa ſit magnitudini, cuius radix ſit inuenienda; radix enim quadrati erit medio loco proportionalis, & radix Cubi erit prima duarum medio loco proportionalium, & radix quadrato quadrati erit prima trium medio loco proportionalium, & ſic de cæteris.

Et hæc mihi Elementa non ſcribenti ad intelligenda ea, quæ ſubſequentur ſatis perſpicuè dicta ſint ijs, qui iam non Elementorum tantum, ſed Geometricæ Analyſis fundamenta ſibi ſubſtruxerunt; cum horum rudibus, hæc futura ſint obſcuriora. Quare ad opus propoſitum Geometrica methodo proſequendum proponam terminorum definitiones, quæ ex hoc Iſagogico prolegomene manifeſtæ ſatis erunt.



DEFI-

DEFINITIONES.

I.



Lano plana similia voco parallelepipeda illa, quæ super similibus parallelogrammis basibus constituta habent altitudines in duplicata ratione homologorum laterum similium basium, vel in ratione basium, vel in ratione subsesquiplicata similium solidorum.

II.

Plano solida similia voco parallelepipeda illa, quæ super similibus parallelogrammis basibus constituta habent altitudines in triplicata ratione homologorum laterum similium basium, vel sesquiplicata similium basium, vel in ratione similium solidorum super similibus basibus constitutorum, vel in ratione subsesquitriplicata similium plano planorum.

III.

Solido solida similia voco parallelepipeda illa, quæ super similibus parallelogrammis basibus constituta habent altitudines in quadruplicata ratione laterum homologorum similium

basium, vel duplicatam basium, vel sesquitriplicatam similium solidorum super similibus basibus constitutorum, vel in ratione similium plano planorum super similibus basibus constitutorum, vel in ratione subsesquiquadruplicata similium plano solidorum.

Et ex his patent altiorum magnitudinum similium definitiones.

IV.

Linea cui, vel cuius potestati reliquas magnitudines comparabo à me vocabitur rationalis.

V.

Si fuerint quatuor magnitudines continuè proportionales, ratio primæ ad quartam à me dicitur sesquiplicata eius, quam habet prima ad tertiam; & ratio primæ ad tertiam à me dicitur subsesquiplicata eius, quam habet prima ad quartam; similiter si fuerint quinq; continuè proportionales, ratio primæ ad quintam à me dicitur sesquitriplicata eius, quam habet prima ad quartam, & ratio primæ ad quartam subsesquitriplicata eius, quam habet prima ad quintam, & sic de cæteris.

LEM-

LEMMATA.

LEMMA I.

Si prima magnitudo ad secundam habu erit maiorem rationem, quam tertia ad quar tam, erit factum sub pri ma, & quarta maius facto sub secunda, & tertia.



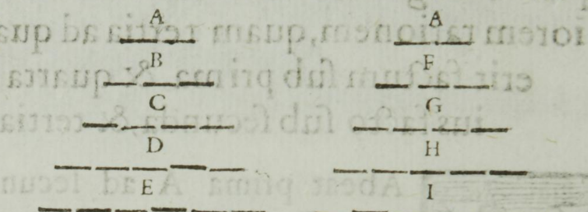
Abeat prima A ad secundam B maiorem rationem, quam tertia C ad quartam D. Dico factũ ex A in D superare factum ex B in C. Fiat, vt A ad B, ita C ad E, habebit C ad E maiorem rationem, quam ad D; ergo D superabit E; ergo factum ex A in D superabit factum ex A in E; sed factum ex A in E est æquale facto ex B in C; ergo factum ex A in D superat factum ex B in C; & hoc argumentum semper eadem vi concludet si A, & B sint lineæ, C verò, & D sint plana, vel corpora, vel plano plana, aut è contra.

LEMMA II.

Si sint duæ series continuè proportionalium ab eadem magnitudine incipientium, habebit tertia primæ seriei ad tertiam secundæ seriei duplicatam rationem eius, quam habet secunda primæ seriei ad secundam se-

cundæ ſeriei; & quarta ad quartam tripli-
catam, quinta ad quintam quadruplicatam,
& ſic in infinitum.

Int ab eadem A duæ ſeries continuè pro-



portionalium A B C D E, & A F G H I. Dico C ad G habere duplicatam rationem eius, quam habet B ad F, & D ad H triplicatam, & E ad I quadruplicatam, & ſic procedendo.

Quia vt C ad G, ita factum ſub A, & C ad factum ſub A, & G, ideſt B quadratum ad F quadratum; ſed B quadratum ad F quadratum habet duplicatam rationem lateris B ad F; ergo C ad G habet duplicatam rationem B ad F; ſed cum factum ex B in C ad factum ex F in G habeat rationem compoſitam ex ratione B ad F, & ratione C ad G, ideſt duplicata ipſius B ad F, ideſt triplicatam ipſius B ad F; & facto B in C æquetur factum ex A in D; facto vero ex F in G factum ex A in H, habebit factũ ex A in D ad factum ex A in H, ideſt D ad H rationem triplicatam B ad F; ſimiliter argumentabimur de cæteris.

LEM-

LEMMA III.

Si ab inæqualibus quantitatibus æqualia detrahantur, habebit minor ad maiorem maiorem rationem, quam minus residuum ad maius residuum; & conuertendo maior ad minorem minorem rationem, quam maius residuum ad minus residuum.

A ——— E ——— B

C ——— G ——— F ——— D

Sint inæquales quãtitates A B minor, & C D maior, à quibus detrahantur æquales E B, & F D. Dico A B ad C D habere maiorem rationem, quam A E ad C F, & C F ad A E maiorem, quam C D ad A B.

Fiat vt A B ad C D, ita E B ad aliam, quæ erit maior, quam F D, quia C D superat A B; sit hæc D G; erit vt A B ad C D, ita A E ad C G; sed A E ad C G habet maiorem rationem, quam ad C F; ergo A B ad C D habet maiorem rationem, quam A E ad C F; & conuertendo C D ad A B habebit minorem rationem, quam C F ad A E, quod erat probandum.

LEMMA IV.

Si inæqualibus quantitatibus æqualia addantur, habebit minor ad maiorem minorem rationem, quam minor cum adiecta ad maiorem cum adiecta, & conuertendo maior cum adiecta ad minorem cum adiecta habebit

bebit minorem rationem, quam maior ad minorem.

A B E

C D F G

SInt inæquales quātitates A B minor & C D maior, quibus addanrur æquales B E, & D F. Dico A B ad C D habere minorem rationem, quam A E ad C F, & C F ad A E minorem, quam C D ad A B.

Fiat vt A B ad C D, ita B E ad D G, quæ erit maior, quam D F; quare vt A B ad C D, ita erit A E ad C G; sed A E ad C G habet minorem rationem, quam ad C F; ergo A B ad C D, habet minorem rationem, quam A E ad C F, & è contra C D ad A B maiorem, quam C F ad A E, quod erat probandum.

LEMMA V.

Si recta linea secetur in duo segmenta æqualia, & deinde in duo inæqualia, habebit alterum æqualium segmentorum ad alterum inæqualium maiorem rationem, quam alterum inæqualium ad alterum æqualium.

A D E B

SIt recta A B secta in duo æqualia in D, & in duo inæqualia in E. Dico D B alterum segmentorum æqualium ad E B, seu A E alterum segmentorum inæqualium, habere maiorem rationem, quam A E, seu E B alterum segmentorum inequalium ad A D alterum segmentorum æqualium.

Quia

Quia D E ad E B habet maiorem rationem, quam ad D B, & componendo D B ad E B habebit maiorem rationem, quam D E plus D B ad D B, ideſt A E ad A D, & permutando D B ad A E habebit maiorem rationē, quam E B ad A D, quod erat probandū.

LEMMA VI.

Si recta linea ſecetur primo in duo ſegmenta, quorum alterum alterius ſit duplum, ſecundo in duo alia quæcunq; ſegmenta; habebit minus ſegmentum primæ ſectionis, ad ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale maiorem rationem, quam ſit ratio duplicata alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis, ad maius ſegmentum primæ ſectionis.

SIt recta O M ſecta primo in B; ita vt O B ſit dupla ipſius B M; ſecundo vtcunq; in E. Dico B M minus ſegmentum primæ ſectionis ad E M ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale habere maiorem rationem, quā ſit ratio duplicata O E ad O B.

Sit vt O E ad O B, ita O B ad F; erit ratio O E ad F duplicata ipſius O E ad O B. Dico B M ad E M habere maiorem rationem, quam O E ad F.

Sit prius O E maior, quam O B; erit etiam F maior quam O B minus B E; nam cum O E, & O B, & F ſint continuè proportionales, erit O E plus F maior dupli-

ci O B,

ci O B; dempto O B communi, erit B E plus F maior O B; ab vtraq; dematur B E; erit F maior O B, minus B E; ergo O E ad O B minus B E habebit maiorem rationem, quam ad F. Tum sic, quia B M ad E M est, vti dupla ipsius B M ad duplam ipsius E M, idest vti O B ad O B minus duplici B E; si vtriq; termino addatur B E, habebit, per quartum Lemma, B M ad E M maiorem rationem, quam O E, ad O B minus B E, sed O E ad O B minus B E habet maiorem rationem, quam ad F: ergo B M ad E M multo maiorem rationem habebit, quam O E ad F, idest, quam sit duplicata ratio ipsius O E ad O B, quod erat probandum.

Sit secundo O B maior ipsa O E, & facta sit vt O E ad O B, ita O B ad F; erit etiam F maior, quam O B plus B E; quia O E plus F superat duplam ipsius O B, & dupla ipsius O B est æqualis O E, vna cum O B plus B E; si dematur communis O E, erit F maior O B plus B E; ergo O E ad O B plus B E habebit maiorem rationem, quam ad F. Tum sic quia B M ad E M est, vt dupla B M ad duplam E M, idest, vt O B ad O B plus 2 B E; si vtriq; dematur idem B E, remanebit O E, & O B plus B E; quare B M ad E M habebit maiorem rationem, quam O E ad O B plus B E, per Lemma tertium; ergo multo maiorem, quam O E ad F, idest quam sit ratio O E ad O B duplicata.

LEMMA VII.

Si recta linea secetur in duo segmenta, quorum alterum alterius sit duplum, secundo in duo alia segmenta quæcunque; habebit

minus

minus ſegmentum primæ ſectionis ad medio loco proportionalem inter minus ſegmentum primæ ſectionis, & alterum ſegmentum ſecundæ ſectionis minori ſegmento primæ ſectionis inæquale maiorem rationem, quam alterum ſegmentum ſecundę ſectionis ad maius ſegmentum primæ ſectionis; vel erit ratio ſubduplicata minoris ſegmenti primæ ſectionis ad ſegmentum ſecundę ſectionis ſibi inæquale maior ratione alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis ad maius ſegmentum primæ ſectionis.

SIt data recta B A, quæ prius diuidatur in M, ita vt M A ſit ipſius B M dupla, deinde vtcunq; in E; & fiat, vt B M ad G, ita G ad B E. Dico B M minus ſegmentum primæ ſectionis ad G medio loco proportionalem inter minus ſegmentum primæ ſectionis, & ſegmentum ſecundæ ſectionis ipſi minori ſegmento primæ ſectionis inæquale habere maiorem rationem, quã A E alterum ſegmentum ſecundæ ſectionis ad A M maius ſegmentum primæ ſectionis.

G
B E M E A

Sit primo B E minor, quam B M. Quia, vt B M ad G, ita G ad B E; erit G minor dimidia ſumma extremarũ, ideſt B M minus dimidia E M; quare B M ad G habebit maiorem rationem, quam ad B M, minus dimidia E M, ideſt, quam dupla ipſius B M ad duplam ipſius B M minus E M, ideſt quam A M ad A M minus E M; ſed A M ad A M minus E M habet maiorem rationem,

quam A M plus E M, ideſt A E ad A M, per lemma quartum; ergo B M ad G multò maiorem rationem habebit, quam A E ad A M, quod erat probandum.

Sit ſecundo B E maior, quam B M. Quia vt B M ad G, ita G ad B E; erit G minor dimidia ſumma extremarum, ideſt quam B M plus dimidia E M; quare B M ad G habebit maiorem rationem, quam ad B M, plus dimidia E M, ideſt quam dupla ipſius B M ad duplam ipſius B M plus E M, ideſt quam A M ad A M, plus E M; ſed A M ad A M, plus E M habet maiorem rationem, quam A M minus E M, ideſt A E ad A M, per lemma tertium; ergo B M ad G multo maiorem rationem habebit, quam A E ad A M, quod erat probandum.

LEMMA VIII.

Si recta linea ſecetur primo in duo ſegmenta, quorum alterum alterius ſit triplum, ſecundo in duo alia quæcunq; ſegmenta; habebit minus ſegmentum primæ ſectionis ad ſegmentũ ſecundæ ſectionis ſibi inæquale maiorem rationem, quam ſit ratio triplicata alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis ad maius ſegmentum primæ ſectionis.

A ——— E M E B
F ———
G ———

Sit recta A B ſecta primo in M; ita vt A M ſit tripla ipſius M B; ſecundo ſecta vtcunq; in E. Dico B M minus ſegmentũ primę ſectionis ad E B ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale

habere

habere maiorem rationem, quam ſit ratio triplicata A E ad A M.

Cum E B poſſit eſſe, vel maior, vel minor, quã B M. Sit primo minor; & fiant quatuor continuè proportionales A E, & A M, & F, & G; ita vt ſit, vt A E ad A M, ita A M ad F, & F ad G; erit ratio A E ad G triplicata ipſius A E ad A M; & erit A E, plus G maior, quam A M plus F; & A E plus F ſuperabit duplam A M; & dempto vtrinq; communi A M, erit E M plus F maior, quam A M; & ſi vtrinq; dematur E M, erit F maior, quam A M minus E M; ſed A E plus G maior eſt, quam A M plus F, dempto vtrinq; communi A M, erit E M plus G maior, quam F; Ergo E M plus G multò magis ſuperabit A M minus E M; & ſi vtrinq; dematur E M, erit G maior, quam A M minus dupla E M. Quare A E ad A M minus dupla E M habebit maiorem rationem, quam ad G, ideſt quam ſit triplicata ratio ipſius A E ad A M. Tum ſic, quia B M ad B E eſt vti tripla B M ad triplam B E; ſed triplæ B M eſt æqualis A M; ergo B M ad B E erit, vt A M ad triplam B E; ſi vtriq; termino A M, & triplæ B E addatur eadem M E, habebit, per lemma quartum, A M ad triplam B E maiorem rationem, quam A E ad triplam BE, plus E M, ideſt ad A M minus dupla E M. Quare B M ad B E habebit maiorem rationem, quam A E ad A M minus dupla E M; ſed demonſtratum eſt A E ad A M minus dupla E M habere maiorem rationem, quam ſit ratio triplicata ipſius A E ad A M; ergo B M ad B E habebit multò maiorem rationem, quam ſit ratio triplicata A E ad A M, quod erat probandum.

Sit ſecundo E B maior, quam B M. Dico B M ad E B habere maiorem rationem, quam ſit ratio triplicata A E ad A M; Nam factis iterum quatuor continuè proportionalibus, quarum prima ſit A E, & ſecunda A M, erit quarta illa, ad quam A E habebit rationem triplicatam eius, quam habet ad A M; & quia A M eſt æqualis triplæ B M, & A E eſt æqualis triplæ B M minus E M, & B E eſt æqualis B M, plus M E. Dico B M ad B M plus M E habere maiorem rationẽ, quam ſit ratio triplicata, quam habet tripla B M, minus E M ad triplam B M. Fiat enim vt B M ad B M plus M E, ita tripla B M minus E M ad aliam, exurget 3 B M plus 2 M E minus $\frac{\text{M E quadrato}}{\text{B M}}$, quæ minor erit quarta proportionali in ſerie continuè proportionalium, quarum prima ſit 3 B M, minus M E, & ſecunda 3 B M; nam tertia erit $\frac{\text{9 B M quadrata}}{\text{3 B M minus M E}}$, & quarta erit $\frac{\text{27 B M Cubi}}{\text{9 B M quadratis minus 6 B M in M E plus M E quadrato}}$, quæ ſuperabit 3 B M plus 2 M E, minus $\frac{\text{M E quadtato}}{\text{B M}}$, & id circò ad hanc 3 B M, minus E M habebit maiorem rationem, quam ad quartam proportionalem inuentam; ſed 3 B M minus E M ad 3 B M, plus 2 M E minus $\frac{\text{M E quadrato}}{\text{B M}}$ habet per conſtructionem eam rationem, quam habet B M ad B M, plus M E, ideſt B E; ergo B M ad B E habet maiorem rationem, quam ſit ratio A E ad A M triplicata. Quartam vero proportionalem inuentam, ideſt $\frac{\text{27 B M Cubos}}{\text{9 B M quadratis minus 6 B M in M E plus M E quadrato}}$ ſuperare 3 B M, plus 2 M E minus $\frac{\text{M E quadrato}}{\text{B M}}$ ex ſequentibus patebit; nam ſi vtraq; pars ducatur in 9 B M quadrata minus 6 B M in M E plus M E quadrato, prima pars erit æqualis 27 B M cubis, & ſecunda pars erit æqualis 27 B M

cubis,

cubis, minus 18 B M in M E quadratum plus 8 M E cubis minus $\frac{\text{M E quadrato quadrato}}{\text{B M}}$; & si fiat Antithesis, & demantur communia, prima pars erit æqualis 18 B M in M E quadratum plus $\frac{\text{M E quadrato quadrato}}{\text{B M}}$, & secunda pars erit æqualis 8 M E cubis; & si vtraq; pars ducatur in B M, & applicetur M E quadrato, erit prima pars æqualis 18 B M quadratis plus M E quadrato; & secunda pars æqualis 8 B M in M E; primam autem partem superare secundam patet; nam si M E fingatur, vt sit omnium maxima, etiam secunda pars erit omnium maxima; sed cum, vt sit maxima, licet possit superare duplam B M, tamen debeat deficere à tripla B M; constituatur æqualis duplici B M, plus A; ita tamen vt B M superet A, erit prima pars, facta interpretatione, æqualis 22 B M quadratis plus 4 B M in A plus A quadrato, & secunda pars erit æqualis 16 B M quadratis plus 8 B M in A, & demptis communibus, erit prima pars æqualis 6 B M quadratis plus A quadrato, & secunda pars erit æqualis 4 B M in A; cum autem B M superet A, & prima pars superabit secundam. Quare euidens erit conclusio B M ad B E habere maiorem rationem, quam sit ratio triplicata A E ad A M, quod erat demonstrandum.

LEMMA IX.

Si fuerint quatuor magnitudines continuè proportionales aggregatum duplæ maximæ cum minima superabit triplam mediam maiorem, & aggregatum duplæ minimæ cum

cum maxima superabit triplam mediam minorem.

SIt vt A ad B, ita B ad C, & C ad D, & sit A maxima, & D minima. Dico primo aggregatum duplæ A cum D superare triplam B; Quia A plus D superat B plus C, & A plus C superat duplam B, erit aggregatum ex duplici A, plus D plus C maius aggregato ex tripla B plus C, & si dematur communis C erit dupla A plus D maior triplici B, quod erat probandum.

Dico secundo aggregatum duplæ D cum A superare triplam C. Quia D plus A superat B plus C, & D plus B superat duplam C, erit aggregatum ex duplici D plus A plus B maius aggregato ex triplici C plus B, & dempto communi B, erit aggregatum ex duplici D plus A maius triplici C, quod erat demonstrandum.

LEMMA X.

Si recta linea secetur in duo segmenta, quorum alterum alterius sit triplum, secundo in duo alia segmenta quæcunq; habebit minus segmentum primæ sectionis ad primam duarum medio loco proportionalium inter minus segmentum primæ sectionis, & alterum segmentum secundę sectionis minori segmento primæ sectionis inæquale maiorem rationem, quam alterum segmentum

secundæ

ſecundæ ſectionis ad maius ſegmentum primæ ſectionis ; vel erit ratio ſubtriplicata minoris ſegmenti primæ ſectionis ad ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale maior ratione alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis ad maius ſegmentum primæ ſectionis ; Vel maius ſegmentum primæ ſectionis ad ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale habebit maiorem rationem , quam ſit ratio primæ duarum medio loco proportionalium inter minus ſegmentum primæ ſectionis , & alterum ſegmentum ſecundæ ſectionis ad minus ſegmentum primæ ſectionis ; ideſt quam ſit ratio ſubtriplicata alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis ad minus ſegmentum primæ ſectionis ; eadem enim eſt ſemper propoſitio .



It data recta B A, quæ primo diuidatur in M, ita vt M A ſit ipſius B M tripla, deinde vtcunq; in E, & inter B M, & B E ſupponantur duæ mediæ proportionales G, & F; ita vt ſit, vt B M ad G, ita G ad F, & F ad B E . Dico B M minus ſegmentum primæ ſectionis ad G primam medio loco ptoportionalium inter B M minus ſegmentum primæ ſectionis, & B E ſegmentum ſecundæ ſectionis ipſi B M inæquale ha-

A E M E B
F
G

bere

bere maiorem rationem, quam A E alterum ſegmentum ſecundæ ſectionis ad A M maius ſegmentum primæ ſectionis; & è contra A M maius ſegmentum primæ ſectionis ad A E ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale habere maiorem rationem, quam G ad B M, ideſt, quam B E ad F, ideſt, quam ſit ratio ſubtriplicata B E alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis ad B M minus ſegmentum primæ ſectionis.

Sit primo B E minor, quam B M, erit, per ſuperius lemma, dupla B M plus B E maior, quam tripla G, & quia B M eſt æqualis B E plus E M, erit tripla B M minus E M maior, quam tripla G; & ſi vtriuſq; partis ſumatur pars tertia, erit B M minus tertia parte E M maior G. Quare B M ad G habebit maiorem rationem, quam ad B M minus tertia parte E M, ſeu quam tripla B M, ideſt A M ad A M minus E M; ſi autem vtriq; parti addatur E M, habebit per lemma quartum, A M plus E M, ideſt A E ad A M minorem rationem, quam A M ad A M minus E M; ergo B M ad G multo maiorem rationem habebit, quam A E ad A M, quod erat primo loco probandum.

Sit ſecundo B E maior, quam B M. Quia per lemma ſuperius, dupla B M plus B E ſuperat triplam G, & B E eſt æqualis B M plus E M, erit tripla B M, ideſt A M plus E M maior tripla G; quare tripla B M ad triplam G habebit maiorem rationem, quam ad A M plus E M; ſed vt tripla B M ad triplam G, ita B M ad G; ergo B M ad G habebit maiorem rationem, quam tripla B M, ideſt A M ad A M plus E M; & quia A M ad A M, plus E M habet maiorem ra-

tionem,

tionem, quam A M minus E M, ideſt A E ad A M, per lemma tertium; habebit B M ad G multo maiorem rationem, quam A E ad A M, quod erat probandum.

LEMMA XI.

Si recta linea ſecetur primo in duo ſegmenta, quorum alterum alterius ſit quadruplum, ſecundo in duo alia quæcunq; ſegmenta, habebit minus ſegmentum primæ ſectionis ad ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale maiorem rationem, quam ſit ratio quadruplicata alterius ſegmenti ad maius ſegmentum primæ ſectionis.

A E M E B
F
G
R

Sit recta A B ſecta primo in M; ita, vt A M ſit quadrupla ipſius M B, ſecundo ſecta vtcunq; in E. Dico B M minus ſegmentum primæ ſectionis ad E B ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale habere maiorem rationem, quam ſit ratio quadruplicata A E ad A M.

Cum E B poſſit eſſe, vel maior, vel minor, quam B M; ſit primo minor, & fiant quinq; continuè proportionales A E, & A M, & F, & G, & R; ita, vt ſit, vt A E ad A M, ita A M ad F, & F ad G, & G ad R; erit ratio A E ad R quadruplicata rationis A E ad A M. Dico B M ad B E habere maiorem rationem, quam A E ad R.

Quia A E, plus F ſuperat duplam A M, & A E per

E con-

constructionem est æqualis A M plus M E, erit aggregatum ex A M cum M E cum F maius dupla A M; vtrinque dematur A M plus M E, erit F maior A M minus M E. Quia vero A E plus G superat A M plus F, si dematur vtrinque A M, erit M E plus G maior, quam F; ergo multo maior, quam A M minus M E; ergo si dematur vtrinq; M E, G superabit A M minus duplici M E.

Rursus, quia A M plus R superat F plus G, & F superat A M minus M E, & G superat A M minus duplici M E, multo magis A M plus R superabit duplam A M minus tripla M E; si vtrinq; dematur A M, & R superabit A M minus tripla M E; ergo A E ad A M minus tripla M E habebit maiorem rationem, quam ad R; sed, vt B M ad B E, ita quatuor B M, idest A M ad quatuor B E, idest ad A M minus quatuor M E, & A M ad A M minus quatuor M E habet maiorem rationem, quam A M plus M E, idest A E ad A M, minus tripla M E, per lemma quartum, & A E ad A M minus tripla M E habet maiorem rationem, quam ad R; ergo B M ad B E habebit multo maiorem rationem, quam A E ad R, quod erat demonstrandum.

ALITER.

Quia R superat A M minus tripla M E, & multo magis etiam superabit si dematur ea, ad quam M E habeat eam rationem, quam habet B M ad M E; sed hæc est illa, ad quam quadrupla B M plus M E, idest A E habet eam rationem, quam B M habet ad B M minus M E, idest ad B E; quare si fiat, vt B M ad B E, ita A E ad aliam, hæc erit minor quam R; ergo A E ad hanc habebit maiorem rationem, quam ad R; ergo B M ad B E habebit maiorem

rem rationem, quam A E ad R, quod erat demonstrandũ.

Sit secundo B E maior, quam B M, & sit iterum, vt A E ad A M, ita A M ad F, & F ad G, & G ad R. Dico secundo B M ad B E habere maiorem rationem, quam A E ad R.

Quia A E plus F superat duplam A M, & A E est æqualis A M minus M E; si vtrinq; dematur A E, erit F maior, quam A M plus M E. Quia verò A E plus G superat A M plus F, sit dematur vtrinq; A E, erit G maior F plus M E, & G minus M E superabit F; ergo multo magis A M plus M E; Vtriq; parti addatur M E; ergo G superabit A M plus dupla M E. Rursus, quia A M plus R superat F plus G, ergo multo magis superabit duplã A M plus tripla M E; & si vtrinq; dematur A M, erit R maior A M plus tripla M E; ergo A E ad A M plus tripla M E habebit maiorem rationem, quam ad R; sed vt B M ad B E, ita quatuor B M, idest A M ad quatuor B E, idest A M plus quatuor M E; si dematur M E, habebit, per lemma tertium, A M ad A M plus quatuor B E, idest B M ad B E maiorem rationem, quam A M minus M E ad A M plus tripla M E, idest A E ad A M plus tripla M E; sed A E ad A M plus tripla M E demonstrata est habere maiorem rationem, quam ad R; ergo B M ad B E habebit multo maiorem rationem, quam A E ad R, quod erat probandum.

ALITER.

Quia R superat A M plus tripla M E, multo magis superabit, si ab A M plus tripla M E dematur ea, ad quam M E habeat eam rationem, quam habet B M ad M E; sed hæc est illa, ad quam quadrupla B M minus

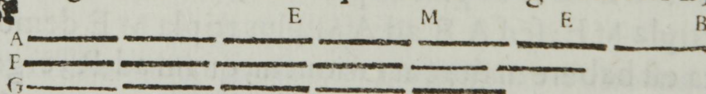
ME, ideſt AE habet eam rationem, quam habet BM ad BM plus ME, ideſt ad BE; ergo ſi fiat vt BM ad BE, ita AE ad aliam, hæc erit minor quam R; ergo AE ad hanc habebit maiorem rationem, quam ad R; ergo BM ad BE habet maiorem rationem, quam AE ad R, ideſt quam ſit ratio AE ad AM quadruplicata, quod ſumpſimus demonſtrandum.

LEMMA XII.

Si recta linea ſecetur primo in duo ſegmenta, quorum alterum alterius ſit ſeſquialterum; tum in alia duo vtcunq; habebit minus ſegmentum primæ ſectionis ad ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale maiorem rationem, quam ſit ratio ſeſquiplicata rationis alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis ad maius ſegmentum primæ ſectionis.



It data recta AB, quæ prius ſecetur in M; ita vt ſegmentũ AM ſit ſeſquialterum ſegmenti MB;



deinde vtcunq; in E, & fiat, vt AE ad F, ita F ad AM, & AM ad G; erit ratio AE ad G ſeſquiplicata rationis AE ad AM. Dico BM ad BE habere maiorem rationem, quam AE ad G. Vel BE erit maior quam BM, vel minor. Sit primo BE minor, quam BM, & ſit æqualis BM, minus EM; erit AE æqualis AM, plus EM,

&

& A M eſt ſeſquialtera B M per conſtructionem.

Quia verò A E, & F, & A M, & G ſunt continuè proportionales; erit, per lemma nonum, aggregatum duplæ G, cum A E maius tripla A M; & ſi dematur vtrinq; A E, erit dupla G maior dupla A M, minus M E; & ſi vtraq; pars diuidatur per duo, erit G maior A M minus dimidia M E; Quare A E ad A M minus dimidia M E habebit maiorem rationem, quam ad G; ſed quia, vt B M ad B M minus E M; ita ſeſquialtera B M ad ſeſquialteram B M minus ſeſquialtera E M, ideſt A M ad A M minus ſeſquialtera E M; ſi vtriq; termino addatur E M, habebit, per Lemma quartum, A M ad A M minus ſeſquialtera E M maiorem rationem, quam A E ad A M minus dimidia E M; ergo multo maiorem, qnam A E ad G; ſed vt A M ad A M minus ſeſquialtera E M, ita eſt B M ad B M minus E M, ideſt B M ad B E; ergo B M ad B E habet maiorem rationem, quam A E ad G, ideſt quam ſit ratio ſeſquiplicata A E ad A M, quod erat primo loco demonſtrandum.

Sit ſecundo B E maior, quam B M, ideſt æquetur B M, plus E M; erit A E æqualis A M minus E M, & A M eſt ſeſquialtera B M, per conſtructionem.

Quia vero A E, & F, & A M, & G ſunt continuè proportionales; erit, per Lemma nonum, aggregatum duplæ G, cum A E maius tripla A M; & ſi dematur vtrinque A E, erit dupla G maior dupla A M plus M E; & ſi vtraq; pars diuidatur per duo, erit G maior A M, plus dimidia M E. Quare A E ad A M, plus dimidia M E habebit maiorem rationē, quam ad G; ſed quia, vt B M ad B E, ideſt B M plus E M, ita ſeſquialtera B M ad ſeſ-

quialteram B M plus ſeſquialtera E M , ideſt A M ad A M plus ſeſquialtera E M; ſi ab vtroq; termino ſubtrahatur eadem E M, habebit A M ad A M plus ſeſquialtera E M maiorem rationem, quam A E ad A M , plus dimidia E M ; ſed A E ad A M plus dimidia E M habet maiorem rationem, quam A E ad G; ergo A M ad A M plus ſeſquialtera E M habebit multo maiorem rationem, quam A E ad G; ſed vt A M ad A M plus ſeſquialtera E M, ita B M ad B M, plus E M, ideſt B M ad B E; ergo B M ad B E habebit maiorem rationem, quam A E ad G, ideſt, quam ſit ratio ſeſquiplicata A E ad A M, quod erat demonſtrandum.

LEMMA XIII.

Si recta linea ſecetur primo in duo ſegmenta, quorum alterum alterius ſit ſeſquialterum; tum in alia duo vtcunq; habebit maius ſegmentum primæ ſectionis ad ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale maiorem rationem, quam ſit ratio ſubſeſquiplicata rationis alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis ad minus ſegmentum primæ ſectionis.


It data recta A B, que prius

ſecetur in M, ita vt B M ſit ſeſquialtera ipſius A M, deinde vtcunq; in E. Dico B M maius ſegmentum primæ ſectionis ad B E ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale habere maiorem rationem, quam ſit ratio ſubſeſ-

quipli-

quiplicata A E alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis ad A M minus ſegmentum primæ ſectionis.

Inter A E, & A M intelligantur duæ mediæ proportionales F, & G: ita vt ſit, vt A E ad F, ita F ad G, & G ad A M (cum autem indeterminata ſit A E, & non exigatur ipſa duarum mediarum inter duas datas inuentio, ſed ſolum, vt admittantur inuentæ, hæc hypoteſis non officiet geometricæ demonſtrationi;) Quare ratio A E ad G erit ſubſeſquiplicata ipſius A E ad A M. Dico B M ad B E habere maiorem rationem, quam A E ad G. Vel B E erit minor, quam B M, vel maior.

Sit primo B E minor, quam B M, & ſit æqualis B M minus E M, erit A E æqualis A M plus E M; & quia A M eſt ſubſeſquialtera B M, erit B M æqualis $\frac{3 A M}{2}$, & B E æqualis $\frac{3 A M}{2}$ minus E M. Dico $\frac{3 A M}{2}$ ad $\frac{3 A M}{2}$ minus E M habere maiorem rationem, quam A M plus E M ad G.

Si enim non habeat maiorem rationem, vel habebit æqualem, vel minorem. Habeat primo æqualem; ſi continuetur ratio A M ad G, vt ſint quatuor continuè proportionales, erit quarta continuè proportionalium eadem A M plus E M; ſi verò habeat minorem rationem; ſi fiat, vt $\frac{3 A M}{2}$ ad $\frac{3 A M}{2}$ minus E M, ita A M plus E M ad aliam, hæc erit maior G; nam A M plus E M ad hanc habebit minorem rationem, quam ad G; cum igitur ſit maior, quam G, ſi continuetur ratio A M ad hanc inuentam, vt ſint quatuor continuè proportionales, erit quarta continuè proportionalium maior, quam ſit A M, plus E M; nam ſi deficeret ab A M plus E M, euidens eſſet etiam inuentam illam deficere a G; quare manifeſta eſſet propoſitio $\frac{3 A M}{2}$ ad $\frac{3 A M}{2}$ minus E M habe-

re

re maiorem rationem, quam A M plus E M ad G. Experiamur igitur, & fiat vt $\frac{3\ A\ M}{2}$ ad $\frac{3\ A\ M}{2}$ minus E M, ita A M, plus E M ad aliam, exurget A M plus $\frac{E\ M}{3}$ minus $\frac{2\ E\ M\ \text{quadratis}}{3\ A\ M}$. Reperiantur nunc quatuor continuè proportionales, quarum prima sit A M, & secunda A M plus $\frac{E\ M}{3}$ minus $\frac{2\ E\ M\ \text{quadratis}}{3\ A\ M}$; erit tertia A M plus $\frac{2\ E\ M}{3}$ minus $\frac{11\ E\ M\ \text{quadratis}}{9\ A\ M}$ minus $\frac{4\ E\ M\ \text{Cubis}}{9\ A\ M\ \text{quadratis}}$ plus $\frac{4\ E\ M\ \text{quadrato quadratis}}{9\ A\ M\ \text{Cubis}}$; & quarta erit A M plus E M minus $\frac{5\ E\ M\ \text{quadratis}}{3\ A\ M}$ minus $\frac{35\ E\ M\ \text{Cubis}}{27\ A\ M\ \text{quadratis}}$ plus $\frac{10\ E\ M\ \text{quadrato quadratis}}{9\ A\ M\ \text{Gubis}}$ plus $\frac{4\ E\ M\ \text{quadrato Cubis}}{9\ A\ M\ \text{quadrato quadratis}}$ minus $\frac{8\ E\ M\ \text{Cubo Cubis}}{27\ A\ M\ \text{quadrato Cubis}}$. Hæc vltimo loco inuenta comparanda est cum A M plus E M, vt cognoscamus, sit ne ipsi æqualis, an cedat, an superet; comparetur, & fiat Antithesis; cum vtriq; parti idem addatur, aut subtrahatur, si extiterint æquales. omnia semper erunt æqualia; si verò nõ extiterint æquales, pars, quæ primo superabat, aut cedebat, semper etiam superabit, aut cedet; idem etiam accidet, si vtraq; pars in eandem quantitatem ducatur, aut eidem quantitati applicetur. Fiat igitur Antithesis, & demantur cõmunia, erit prima pars $\frac{10\ E\ M\ \text{quadrato quadrata}}{9\ A\ M\ \text{Cubis}}$ plus $\frac{4\ E\ M\ \text{quadrato Cubis}}{9\ A\ M\ \text{quadrato quadratis}}$, & altera pars erit $\frac{5\ E\ M\ \text{quadrata}}{3\ A\ M}$ plus $\frac{35\ E\ M\ \text{Cubis}}{27\ A\ M\ \text{quadratis}}$ plus $\frac{8\ E\ M\ \text{Cubo Cubis}}{27\ A\ M\ \text{quadrato Cubis}}$; & si vtraq; pars ducatur in 27 A M quadrato cubos, erit prima pars 30 A M quadrata in E M quadrato quadratum plus 12 A M in E M quadrato cubum; & secunda pars erit 45 A M quadrato quadrata in E M quadratum, plus 35 A M cubis in E M cubum, plus 8 E M cubo cubis; & si vtraq; pars applicetur ad E M quadratum, erit prima pars 30 A M quadrata in E M quadratum plus 12 A M in E M cubum; & secunda pars erit 45 A M quadrato quadrata plus 35 A M cubis in E M plus 8 E M quadrato quadratis; vt autem dignoscatur alte-

rutrius

rutrius partis, quænam ſit maior, aut minor, conſideretur E M, quæ erit, vel minor, vel æqualis, vel maior A M; ita tamen, vt ſi ſit maior deficiat à $\frac{3\,AM}{2}$. Si ſit æqualis, aut minor, patet 30 A M quadrata in E M quadratum plus 12 A M in E M cubum deficere à 45 A M quadrato quadratis plus 35 A M cubis in E M plus 8 E M quadrato quadratis; Quare iuxta ea, quæ ſuperius docuimus, cum inuenta quarta proportionalis deficiat ab A M plus E M, habebit $\frac{3\,AM}{2}$ ad $\frac{3\,AM}{2}$ minus E M maiorem rationem, quam A M plus E M ad G, quod ſumpſimus demonſtrandum. Sit verò E M maior A M, ſed minor quam $\frac{3\,AM}{2}$; idcirco ſupponatur E M æqualis A M plus F, erit F minor $\frac{AM}{2}$; his poſitis interpretetur vtraq; pars; erit prima pars, ideſt 30 A M quadrata in E M quadratum plus 12 A M in E M cubum æqualis 42 A M quadrato quadratis plus 96 A M cubis in F plus 66 A M quadratis in F quadratum plus 12 A M in F cubum; & ſecunda ideſt 45 A M quadrato quadrata plus 35 A M cubis in E M plus 8 E M quadrato quadratis erit æqualis 88 A M quadrato quadratis plus 67 A M cubis in F plus 48 A M quadratis in F quadratum plus 32 A M in F cubum plus 8 F quadrato quadratis; & ſi ab vtraq; parte tollantur communia, erit reſiduum primæ partis 29 A M cubi in F plus 18 A M quadratis in F quadratum, & reſiduum ſecundæ partis erit 46 A M quadrato quadrata plus 20 A M in F cubum plus 8 F quadrato quadratis; cum autem pateat primam partem deficere à ſecunda, quia $\frac{AM}{2}$ ſuperat F euidens erit concluſio $\frac{3\,AM}{2}$ ad $\frac{3\,AM}{2}$ minus E M habere maiorem rationem, quam A M plus E M ad G, quod propoſuimus.

Sit ſecundo B E maior, quam B M, & ſit æqualis B M plus E M, erit A E æqualis A M minus E M; & quia A M eſt ſubſeſquialtera B M, erit B M æqualis $\frac{3\,A\,M}{2}$, & B E æqualis $\frac{3\,A\,M}{2}$ plus E M; & iterum intelligatur eſſe, vt A M minus E M ad F, ita F ad G, & G ad A M; erit ratio A M, minus E M ad G ſubſeſquiplicata rationis A M minus E M ad A M. Dico igitur $\frac{3\,A\,M}{2}$ ad $\frac{3\,A\,M}{2}$ plus E M habere maiorem rationem, quam A M minus E M ad G. Si enim non habeat maiorem rationem, vel habebit æqualem, vel minorem; ſi habeat ęqualem, ſi continuetur ratio A M ad G, vt ſint quatuor continuè proportionales, erit quarta continuè proportionalium eadem A M minus E M; ſi verò habeat minorem rationem: ſi fiat, vt $\frac{3\,A\,M}{2}$ ad $\frac{3\,A\,M}{2}$ plus E M, ita A M minus E M ad aliam, hæc erit maior G; nam A M minus E M ad hanc habebit minorem rationem, quam ad G; cum igitur ſit maior, quam G, ſi continuetur ratio A M ad hanc inuentam, vt ſint quatuor continuè proportionales, erit quarta continuè proportionalium maior, quam ſit A M minus E M; nam ſi probetur deficere ab A M minus E M, euidens etiam erit inuentam illam deficere à G; Quare manifeſta erit propoſitio $\frac{3\,A\,M}{2}$ ad $\frac{3\,A\,M}{2}$ plus E M habere maiorem rationem, quam A M minus E M ad G. Experiamur igitur, & fiat, vt $\frac{3\,A\,M}{2}$ ad $\frac{3\,A\,M}{2}$ plus E M, ita A M minus E M ad aliam, hæc erit A M minus $\frac{E\,M}{3}$ minus $\frac{2\,E\,M\ \text{quadratis}}{3\,A\,M}$. Reperiãtur nunc quatuor continuè proportionales, quarum prima ſit A M, & ſecunda ſit A M minus $\frac{E\,M}{3}$ minus $\frac{2\,E\,M\ \text{quadrato}}{3\,A\,M}$; erit tertia A M minus $\frac{2\,E\,M}{3}$ minus $\frac{11\,E\,M\ \text{quadratis}}{9\,A\,M}$ plus $\frac{4\,E\,M\ \text{Cubis}}{9\,A\,M\ \text{quadratis}}$ plus $\frac{4\,E\,M\ \text{quadrato quadratis}}{9\,A\,M\ \text{Cubis}}$; & quarta erit A M minus E M minus

$\frac{5\ \text{E M quadratis}}{3\ \text{A M}}$ plus $\frac{35\ \text{E M Cubis}}{27\ \text{A M quadratis}}$ plus $\frac{30\ \text{E M quadrato quadratis}}{27\ \text{A M Cubis}}$ minus $\frac{12\ \text{E M quadrato Cubis}}{27\ \text{A M quadrato quadratis}}$ minus $\frac{8\ \text{E M Cubo Cubis}}{27\ \text{A M quadrato Cubis}}$, quæ, quia cedit ipſi A M minus E M, & etiam A M minus $\frac{\text{E M}}{3}$ minus $\frac{2\ \text{E M quadratis}}{3\ \text{A M}}$, hoc eſt illa ad, quam A M minus E M habet eam rationem, quam habet $\frac{3\ \text{A M}}{2}$ ad $\frac{3\ \text{A M}}{2}$ plus E M, cedet ipſi G; quare $\frac{3\ \text{A M}}{2}$, ideſt B M ad $\frac{3\ \text{A M}}{2}$ plus E M, ideſt B E habebit maiorem rationem, quam A M minus E M, ideſt A E ad G. Nunc reliquum eſt, vt probetur A M minus E M minus $\frac{5\ \text{E M quadratis}}{3\ \text{A M}}$ plus $\frac{35\ \text{E M Cubis}}{27\ \text{A M quadratis}}$ plus $\frac{30\ \text{E M quadrato quadratis}}{27\ \text{A M Cubis}}$ minus $\frac{12\ \text{E M quadrato Cubis}}{27\ \text{A M quadrato quadratis}}$ minus $\frac{8\ \text{E M Cubo Cubis}}{27\ \text{A M quadrato Cubis}}$ cedere ipſi A M minus E M; fiat ideò Antitheſis, & demantur cõmunia, erit reſiduum primæ partis $\frac{35\ \text{E M Cubi}}{27\ \text{A M quadratis}}$ plus $\frac{30\ \text{E M quadrato quadratis}}{27\ \text{A M Cubis}}$; & ſecundæ partis erit $\frac{5\ \text{E M quadrata}}{3\ \text{A M}}$ plus $\frac{12\ \text{E M quadrato Cubis}}{27\ \text{A M quadrato quadratis}}$ plus $\frac{8\ \text{E M Cubo Cubis}}{27\ \text{A M quadrato Cubis}}$. Vtraq; pars ducatur in 27 A M quadrato cubos, & applicetur E M quadrato; erit prima pars 35 E M in A M cubum plus 30 E M quadratis in A M quadratum; & ſecunda pars erit 45 A M quadrato quadrata plus 12 E M cubis in A M plus 8 E M quadrato quadratis; quia verò E M cedit ipſi A M, & prima pars cedet ſecundæ; quod vt euidentius innoteſcat; quia A M ſuperat E M, ſit E M æqualis A M minus F; ſi fiat interpretatio, erit prima pars æqualis 65 A M quadrato quadratis minus 95 A M cubis in F plus triginta A M quadratis in F quadratum; & ſecunda pars erit 65 A M quadrato quadrata minus 68 A M cubis in F plus 84 A M quadratis in F quadratum minus 44 A M in F cubum plus 8 F quadrato quadratis; ſi fiat Antitheſis, & demantur communia, erit prima pars æqualis 44 A M in F cubum, & ſecunda pars erit æqualis 27 A M cubis in F plus 54 A M quadratis in F quadratum plus

8 F quadrato quadratis. Quia autem F cedit ipsi A M, erit factum ex A M in F cubum minus facto ex A M in F quadratum; quare 44 A M in F cubum cedent 44 A M quadratis in F quadratũ. Et idcircò multo magis prima pars cedet secũdæ parti. Quare euidens erit propositio.

LEMMA XIV.

Si recta linea secetur primo in duo segmenta, quorum alterum alterius sit quadruplum, secundo in duo alia quæcunq; segmenta, habebit maius segmentum primæ sectionis ad segmentum secundæ sectionis sibi inæquale maiorem rationem, quam sit ratio subquadruplicata alterius segmenti ad minus segmentum primæ sectionis.



It data recta A B, quæ prius secetur in M; ita vt B M sit quadrupla ipsius A M; secundo secetur vtcunq; in E. Dico B M maius segmentum primæ sectionis ad B E segmentum secundæ sectionis sibi inæquale habere maiorem rationem, quam sit ratio subquadruplicata alterius segmenti A E ad minus segmentum primæ sectionis A M. Inter A E, & A M sint tres continuè proportionales F, & G, & H; ita, vt sint quinque continuè proportionales, quarum prima sit A E, secunda F, tertia G, quarta H, quinta A M, habebit A E ad F rationem subquadruplicatam eius, quam habet

ad A M. Quare dico B M ad B E habere maiorem rationem, quam A E ad F. Vel B E erit maior, quam B M, vel minor.

Sit primò B E minor, quam B M; & quia B M est ęqualis quadruplæ A M, sit B E æqualis quadruplæ A M minus M E, & A E sit æqualis A M, plus M E. Dico 4 A M ad 4 A M minus M E habere maiorem rationem, quam sit ratio A M plus M E, siue A E ad F, seù quam sit ratio subquadruplicata A M plus M E ad A M; si enim non habeat maiorem, vel habebit eandem, vel minorem; si habeat eandem; si fiat, vt 4 A M ad 4 A M minus M E, ita A M plus M E ad aliam, hæc erit æqualis F; & si hæc ratio continuetur, vt sint quinq; continuè proportionales, erit quinta ipsa A M; si verò habeat minorem rationem, si fiat, vt 4 A M ad 4 A M minus M E, ita A M plus M E ad aliam, hæc erit maior, quam F; & ideò, si hæc ratio continuetur, vt sint quinq; continuè proportionales, erit quinta maior A M; si verò habeat maiorem, tunc si fiat, vt 4 A M ad 4 A M minus M E, ita A M plus M E ad aliam, hæc erit minor, quam F; idcirco, si hæc ratio continuetur, vt sint quinque continuè proportionales, erit quinta minor A M. Reperiantur igitur in ratione 4 A M ad 4 A M minus M E quinq; continuè proportionales, quarum prima sit A M plus M E; si quinta probabitur minor, quam sit A M, probata erit propositio. Cum in ratione, quam habent 4 A M ad 4 A M, minus M E quinq; continuè proportionalium, prima sit A M plus M E, erit secunda A M plus $\frac{3\,ME}{4}$ minus $\frac{ME\ \text{quadrato}}{4\,AM}$; & tertia erit A M plus $\frac{ME}{2}$ minus $\frac{7\,ME\ \text{quadratis}}{16\,AM}$ plus $\frac{ME\ \text{Cubo}}{16\,AM\ \text{quadratis}}$; & quarta erit A M, plus $\frac{ME}{4}$

$\frac{\text{M E}}{4}$ minus $\frac{\text{9 M E quadratis}}{\text{16 A M}}$ plus $\frac{\text{11 M E Cubis}}{\text{64 A M quadratis}}$ minus $\frac{\text{M E quadrato quadrato}}{\text{64 A M Cubis}}$; & quinta erit A M minus $\frac{\text{5 M E quadratis}}{\text{8 A M}}$ plus $\frac{\text{5 M E Cubis}}{\text{16 A M quadratis}}$ minus $\frac{\text{15 M E quadrato quadratis}}{\text{256 A M Cubis}}$ plus $\frac{\text{M E quadrato Cubo}}{\text{256 A M quadrato quadratis}}$, quæ ſi comparetur cum A M, erit minor ipſa A M; comparetur enim, & fiat Antitheſis, & dematur communis A M, erit prima pars $\frac{\text{5 M E Cubi}}{\text{15 A M quadratis}}$ plus $\frac{\text{M E quadrato Cubo}}{\text{256 A M quadrato quadratis}}$; & ſecunda pars erit $\frac{\text{5 M E quadrata}}{\text{8 A M}}$ plus $\frac{\text{15 M E quadrato quadratis}}{\text{256 A M Cubis}}$; vtraq; pars ducatur in 256 A M quadrato quadrata, & applicetur M E quadrato, erit prima pars 80 M E in A M quadratum plus M E cubo; & ſecunda pars erit 160 A M cubi plus 15 A M in M E quadratum; vt autem prima pars ſit omnium maxima ponatur M E omnium maxima; nam ſi ponatur minor, prima pars ſemper magis decreſcet à ſecunda parte, vt patet; quia autem, cum, vt ſit maxima, poſſit excedere triplam A M, ſed deficere debeat à quadrupla, ponatur M E æqualis triplæ A M plus F; ita tamen, vt A M ſuperet F; erit, facta interpretatione prima pars æqualis 267 A M cubis plus 107 A M quadratis in F plus 9 A M in F quadratum plus F cubo; & ſecunda pars erit ęqualis 295 A M cubis plus 90 A M quadratis in F plus 15 A M in F quadratum; & ſi vtrinq; demantur communia, erit prima pars 17 A M quadrata in F plus F cubo, & ſecunda erit 28 A M cubi plus 6 A M in F quadratum. Quia vero A M ſuperat F patet etiam primam partem deficere à ſecunda. Quare patet propoſitio; hoc eſt B M ad B E habere maiorem rationem, quam ſit ratio A E ad A M ſubquadruplicata poſita B M maiori, quam B E.

Sit ſecundo B E maior, quam B M; ideò ſit æqualis quadruplæ A M plus M E, & A E ſit æqualis A M

minus

minus M E, & poſitis inter A M minus M E, ideſt A E, & A M tribus continuè proportionalibus F, & G, & H, vt ſuperius; erit ratio A M minus M E ad F ſubquadruplicata rationis A M minus M E ad A M. Dico igitur 4 A M ad 4 A M plus M E habere maiorem rationem, quam A M minus M E ad F; nam ſi fiat, vt 4 A M ad 4 A M plus M E, ita A M minus M E ad aliam, hæc erit minor, quam F; & ſi continuetur ratio, vt ſint quinque continuè proportionales, prima exiſtente A M minus M E, quinta erit minor ipſa A M; quare euidens erit propoſitio. Continuentur in ratione, quam habent 4 A M ad 4 A M plus M E quinq; continuè proportionales, quarum prima ſit A M, minus M E; erit ſecunda A M minus $\frac{3\text{ M E}}{4}$ minus $\frac{\text{M E quadrato}}{\text{4 A M}}$; & tertia erit A M minus $\frac{\text{M E}}{2}$ minus $\frac{\text{7 M E quadratis}}{\text{16 A M}}$ minus $\frac{\text{M E Cubo}}{\text{16 A M quadratis}}$; & quarta erit A M minus $\frac{\text{M E}}{4}$ minus $\frac{\text{9 M E quadratis}}{\text{16 A M}}$ minus $\frac{\text{11 M E Cubis}}{\text{64 A M quadratis}}$ minus $\frac{\text{M E quadrato quadrato}}{\text{64 A M Cubis}}$; & quinta, & vltima erit A M minus $\frac{\text{5 M E quadratis}}{\text{8 A M}}$ minus $\frac{\text{5 M E Cubis}}{\text{16 A M quadratis}}$ minus $\frac{\text{15 M E quadrato quadratis}}{\text{256 A M Cubis}}$ minus $\frac{\text{M E quadrato Cubo}}{\text{256 A M quadrato quadratis}}$, quæ cum deficiat ab A M, idcircò euidens erit concluſio, etiam in hoc caſu, quando B E ſuperat B M habere B M ad B E maiorem rationem, quam ſit ratio A E ad A M ſubquadruplicata, quod erat demonſtrandum.



PRO-

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. ZETETICA.

Inuenire maximum rectangulum contentum ſub duobus ſegmentis propoſitæ rectæ lineæ.



It recta linea A B, quæ ſecanda ſit; ita, vt, quod ſub ſegmentis ſit rectangulum ſit omnium maximum.

A ——————————— B

Cum methodo huius Analyſis mihi in reliquis ſit vtendum liceat in hac prima longius digredi, vt methodi vis appareat.

Per Analyſim Zeteticam ponatur A B æqualis B, & alteri ſegmento ſit æqualis A: erit reliquum ſegmentum B minus A, ex quibus ſegmentis factum rectangulum erit B in A minus quadrato ex A; vt autem hoc rectangulum ſit omnium maximum inueniendum eſt, quam rationem A debeat habere ad B.

Hoc, vt fiat, ſumenda erit altera maior, aut minor ipſa A, ſed minor, quam B; ſi autem ſit maior ipſa A, quæ ſumitur, erit reſiduum ad B hac detracta minus reſiduo ad B detracta ipſa A; Quare vnius augmentum erit alterius decrementum. Sit igitur alterum ſegmentum A plus E, erit alterum B minus A minus E; & factum ſub ſegmentis erit B in A minus A quadrato minus duplici A in E plus B in E minus E quadrato; Quare differentia inter hoc rectangulum, & ſuperius erit B in E minus duplici A in E minus E quadrato; ideſt, quod

fit ex B minus duplici A minus E in E ; aut igitur duplex A plus E deficiet à B, aut excedet ; si deficiet à B, hoc secundum rectangulum altero maius erit ; quare in primo A erit minus, quam dimidium ipsius B, & rectangulum non erit maximum ; & si A superet dimidium ipsius B, & B minus A deficiet ab ipso dimidio, ergo etiam rectangulum non erit maximum ; Quare cum A non possit neque excedere, neque deficere à dimidio ipsius B, vt sit rectangulum maximum, necesse est A æquari ipsius B dimidio ; sed cum instituenda sit Analysis iuxta methodum Analysis maximi, & minimi ; cum E vni segmento addatur, & alteri subtrahatur, supponatur æquale nihilo ; quodcunq; factum erit in E erit æquale nihilo , & cum differentia à maximo æquetur nihilo, si ea, quæ ducuntur in E, & constituunt differentiã inter se comparentur cognoscetur relatio ipsius A ad B.

Differentia igitur rectangulorum est B in E , minus duplici A in E minus E quadrato æqualis nihilo ; ergo per Antithesim erit B in E æqualis duplici A in E plus E quadrato : Si omnia applicentur ipsi E, erit B æqualis duplici A plus E ; sed E est æqualis nihilo , ergo B erit æqualis duplici A; ergo tunc fit maximum rectangulum, quando æqualia sunt segmenta . Hinc

PORISMA.

Maximum rectangulum , quod fit sub segmentis datæ rectæ lineæ est id, quod fit quando segmenta sunt inter se æqualia .

Hoc demonstratur ab Euclide lib. 6. Theoremate vigesimo propositione 27. in qua demonstratur.

Omnium Parallelogrammorum secundum eandem

lineam

lineam applicatorum deficientiumq; figuris parallelogrammis similibus, similiterq; positis ei, quod à dimidia describitur, maximum est quod ad dimidium applicatur simile existens defectui.

Nam si Parallelogrãmum deficiens debeat assimilari quadrato erit sub segmentis lineę factũ rectangulũ. Quibus, vt ab Euclide demonstratis nõ immorabor, sed hoc p lineas homologas demonstrabo sequẽti propositione.

Eadem propositio per lineas homologas data rationali proposita, & demonstrata.

Posita rationali, & linea, quæ secetur vtcunq; si fiat, vt rationalis ad alterum segmentum, ita alterum segmentum ad aliam, hæc erit omnium maxima, quando segmenta erunt æqualia.

Sit data C rationalis, & recta A B, quæ secetur bifariam in D, & non bifariam in E; & fiat, vt C ad A D, ita D B ad F; & vt C ad A E, ita E B ad G. Dico F superare G. Quia, per lemma quintum, D B ad E B habet maiorem rationem, quam A E ad D B, & E B ad G per constructionem eandem, quam C ad A E, habebit ex perturbata Analogia D B ad G maiorem rationem, quam C ad D B; sed vt C ad D B, ita D B ad F; nam D B æqualis est A D, ergo ex eadem perturbata Analogia maiorem rationem habet C ad G, quam ad F, ergo F superat G, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II. ZETETICA.

Inuenire maximum ſolidum, quod fieri poſſit ſub ſegmento propoſitæ rectæ lineæ, & quadrato alterius ſegmenti.



It recta data B oportet ipſam ita ſecare, vt, quod fit ſub altero ſegmento in alterius ſegmenti quadratum ſit omnium maximum eorum, quæ ſub quacunq; alia diuerſa ſectione fieri poſſint.

Sit alterum ſegmentum A, erit alterum B minus A; & quod fit ex B minus A in A quadratum, erit B in A quadratum minus A cubo; determinanda autem ſit ipſa A, vt hoc productum ſit omnium maximum.

Iuxta ſuperiorem methodum ponatur E æquale nihilo, & ſit alterum ſegmentum A plus E, erit alterum B minus A minus E, & quadratum ex A plus E erit A quadratum plus duplici rectangulo ex A in E plus E quadrato, quod ductum in B minus A minus E producet ſolidum B in A quadratum minus A cubo plus duplici ſolido ex B in A in E plus B in E quadratum minus triplici ſolido ex A quadrato in E minus triplici ſolido ex A in E quadratum minus E cubo; & horum genitorum ſolidorum differentia erit duplex ſolidum ex B in A in E plus ſolido ex B in E quadratum minus triplo ſolido ex A quadrato in E minus triplo ſolido ex A in E quadratum minus E cubo æqualis nihilo. Quare omnibus applicatis ad E, & facta Antitheſi, erit duplex B in A minus triplici quadrato ex A æquale triplici re-

ctangulo ex A in E plus E quadrato plus B in E, ideſt nihilo, cum E æquetur nihilo; ergo facta Antitheſi, erit duplex B in A æquale triplici A quadrato, & ſi omnia applicentur ad A, erit duplex B æqualis triplici A, & ſi omnia diuidantur per tria, erunt duæ tertiæ partes ipſius B æquales ipſi A. Hinc

PORISMA.

Maximum ſolidum, quod applicatur alicui lineæ deficiens cubo eſt id, quod tertiæ parti datæ lineæ applicatur, & cubus adiacet duabus tertijs partibus datæ rectæ.

Quod demonſtratur ab Eutocio ad Archimedem de Sphera, & Cylindro libro ſecundo propoſitione tertia, ſed ope conicarum ſectionum, & ab inſigni noſtri ſeculi Mathematico Bonauentura Caualerio per methodum indiuiſibilium. Nos verò Geometricè demonſtrabimus ſequenti propoſitione.

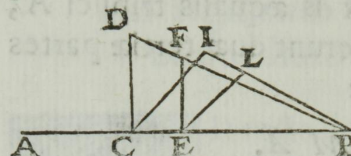
THEOREMA.

Omnium ſolidorum ad eandem lineam applicatorum, & deficientium figuris ſolidis, ſimilibus, ſimiliterq; poſitis maximum eſt illud, quod ad datæ lineę tertiam partem applicatur.

SIt data linea A B, cuius tertia pars ſit A C, cui applicetur ſolidum ex A C in C D in C I deficiens ſolido ex C D in C I in C B. Dico eſſe maximum omnium ſolidorum, quæ applicari poſſint ad aliud, atq; aliud eiuſdem lineæ ſegmentum deficientium ſolido ſimili, ſimiliterq; poſito ſolido C D in C I in C B.

Su-

Sumatur ipsa A C tertia parte datæ rectæ maior, aut minor quæcunque. Sit primo maior A E, cui applicetur solidum ex A E in E F in E L deficiens solido ex E F in E L in E B simili, similiterq; posito solido ex C D in C I in C B; nam B E ad E F est, vti C B ad C D, & B E ad E L est, vti C B ad C I. Dico solidum ex A C in C D in C I superare solidum ex A E in E F in E L.



Analysis primæ partis.

PER Analysim supponatur solidum ex A C in D C in C I superare solidum ex A E in E F in E L, habebit D C ad E F maiorem rationem, quam factum ex A E in E L ad factum ex A C in C I; sed D C ad E F est, vti B C ad B E; ergo B C ad B E habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E L ad factum ex A C in C I, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; ergo solidum ex B C in A C in C I superabit solidum ex B E in A E in E L; ergo factum ex B C in A C ad factum ex B E in A E habebit maiorem rationem, quam E L ad C I; sed, vt E L ad C I, ita B E ad B C: ergo factum ex B C in A C ad factum ex B E in A E habebit maiorem rationem, quam B E ad B C, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; ergo factum ex B C quadrato in A C superabit factum ex B E quadrato in A E; quia autem B C est æqualis duplici A C, & B E est æqualis duplici A C minus C E, & A E est æqualis A C plus C E, si fiat

in-

interpretatio, erit factum ex B C quadrato in A C æquale quadruplo cubo ex A C, & factum ex B E quadrato in A E erit æquale quadruplo cubo ex A C minus triplo solido ex A C in C E quadratum plus C E cubo; Quamobrem quadruplus cubus ex A C superabit quadruplum cubum ex A C minus triplo solido ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E; & si fiat Antithesis, quadruplus cubus ex A C, plus triplo solido ex A C in C E quadratum superabit quadruplum cubum ex A C plus cubo ex C E; & si demantur communia, erit triplum solidum ex A C in C E quadratum maius cubo ex C E; & si omnia applicentur ad C E quadratum, erit tripla A C maior C E, quod patet. Quare certa conclusio nunc ad Synthesim.

Synthesis primæ partis.

QVia A B est æqualis triplæ A C, & A B superat C E, erit tripla A C maior, quam C E, & factum ex tripla A C in C E quadratum superabit C E cubum, & si vtriq; quantitati addatur quadruplus cubus ex A C, erit aggregatum ex quadruplo cubo ex A C plus triplo solido ex A C in C E quadratum maius aggregato ex quadruplo cubo ex A C plus cubo ex C E, & facta Antithesi, quadruplus cubus ex A C superabit quadruplum cubum ex A C minus triplo solido ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E; Quia verò B C est æqualis duplici A C, erit quadruplus cubus ex A C æqualis facto ex B C quadrato in A C; item quia B E est æqualis duplici A C minus C E, & A E est æqualis A C plus C E; si fiat interpretatio

erit

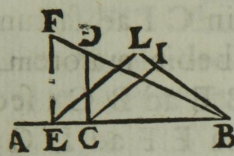
erit quadruplus cubus ex A C minus triplo solido ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E æquale facto ex B E quadrato in A E; Quamobrem factum ex B C quadrato in A C superabit factum ex B E quadrato in A E, & factum ex B C in A C ad factum ex B E in A E habebit maiorem rationem, quam B E ad B C; sed vt B E ad B C, ita E L ad C I, ergo factum ex B C in A C ad factum ex B E in A E habebit maiorem rationem, quam E L ad C I; ergo solidum ex B C in A C in C I superabit solidum ex B E in A E in E L; ergo B C ad B E habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E L ad factum ex A C in C I; sed, vt B C ad B E, ita est D C ad E F: ergo D C ad E F habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E L ad factum ex A C in C I; ergo solidum ex D C in A C in C I superabit solidum ex A E in E L in E F, idest solidum applicatum tertiæ parti datæ rectæ superabit solidum applicatum parti maiori, quam sit tertia pars datæ rectæ, quod erat primo loco demonstrandum.

Analysis secundæ partis.

SIT secundo A E minor, quam A C, cui applicetur solidum ex A E in E F in E L deficiens solido ex E F in E L in E B simili, similiterq; posito solido ex C D in C I in C B. Dico solidum ex A C in C D in C I superare solidum ex A E in E F in E L. Per Analysim supponatur solidum ex A C in C D in C I superare solidum ex A E in E F in E L, habebit C D ad E F maiorem rationem, quam factum ex A E in E L ad factum ex A C in C I; sed D C ad E F est, vti B C

ad

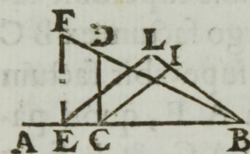
ad B E; ergo B C ad B E habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E L ad factum ex A C in C I, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; ergo solidum ex B C in A C in C I superabit solidum ex B E in A E in E L; ergo factum ex B C in A C ad factum ex B E in A E habebit maiorem rationem, quam E L ad C I; sed vt E L ad C I, ita B E ad B C; ergo factum ex B C in A C ad factum ex B E in A E habebit maiorem rationem, quam B E ad B C, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; ergo factum ex B C quadrato in A C superabit factum ex B E quadrato in A E, quod patet; Quia cum B C sit æqualis duplici A C, & B E sit æqualis duplici A C plus C E, & A E sit æqualis A C minus C E; si fiat interpretatio, erit factum ex B C quadrato in A C æquale quadruplo cubo ex A C; & factum ex B E quadrato in A E erit æquale quadruplo cubo ex A C minus triplici solido ex A C in C E quadratum, minus cubo ex C E; Quare certa conclusio. Hinc ad Synthesim.



Synthesis secundæ partis.

QVia quadruplus cubus ex A C superat quadruplum cubum ex A C minus triplici solido ex A C in C E quadratum minus cubo ex C E; & quadruplo cubo ex A C æquale est factum ex B C quadrato in A C, quia B C est æqualis duplici A C; item quadruplo cubo ex A C minus triplici solido ex A C in C E quadratum minus cubo ex C E est æquale factum ex B E

quadrato in A E, quia B E est æqualis duplici A C plus C E, & A E est æqualis A C minus C E; etiam factum ex B C quadrato superabit factum ex B E quadrato in A E; Quare factum ex B C in A C ad factum ex B E in A E habebit maiorem rationem, quam B E ad B C; sed, vt B E ad B C, ita E L ad C I; ergo factum ex B C in A C ad factum ex B E in A E habebit maiorem rationem, quam E L ad C I, & solidum ex B C in A C in C I superabit solidum ex B E in A E in E L, & factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam B E ad B C; sed vt B E ad B C, ita E F ad D C; ergo factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam E F ad D C, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; factum igitur ex A C in C I in C D superabit factum ex A E in E L in E F, idest solidum applicatum tertiæ parti datæ lineæ superabit solidum applicatum parti minori, quam sit tertia pars datæ lineæ simili existente defectu, quod erat probandum; Cum autem demonstratum sit superare etiam id, quod applicatur parti maiori, ideò certa conclusio.

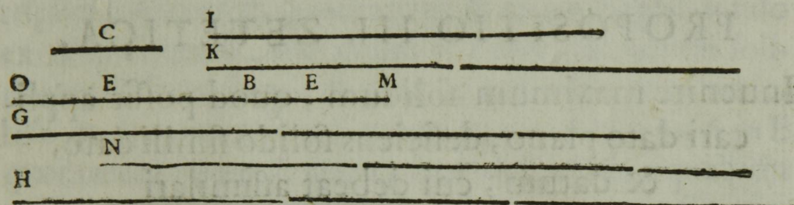


Eadem propositio secunda demonstrata, & proposita per lineas homologas, data rationali.

Datis duabus rectis lineis, quarum altera se habens loco rationalis sit non secta; altera

verò

verò secta vtcunq; , & alterum segmentum sectæ habeat ad aliam lineam rationem duplicatam eius , quam habet rationalis ad alterum segmentum . Dico hanc lineam fore omnium maximam , quando segmentum ad quod refertur rationalis erit æquale duabus tertijs partibus datæ rectæ .



Sit recta quæcunq; C , quæ ponatur , vti rationalis , & altera O M , quæ secetur in B , & E ; & fiat , vt C ad O B , ita O B ad G , & , vt C ad G , ita B M ad H .

Item, vt C ad O E , ita O E ad I , & , vt C ad I , ita E M ad K ; O B verò sit æqualis duabus tertijs partibus ipsius O M ; O E verò vel duas tertias partes superet , vel ipsis cedat . Dico H superare K .

Fiat vt G ad H , ita I ad N ; Quia C , & O B , & G ; item C & O E , & I sunt duæ series continuè proportionalium ab eadem C incipientiũ , per lemma secundũ habebit I ad G duplicatam rationem eius , quam habet O E ad O B ; item , quia , vt C ad G , ita B M ad H , erit , vt C ad B M , ita G ad H ; item quia , vt C ad I , ita E M ad K , erit , vt C ad E M , ita I ad K . Tum considerentur tres rectæ I , G , H , & I , N , K ; Quia , vt C

ad E M, ita I ad K, & vt G ad H, ideſt C ad B M, ita I ad N, erit N ad K, vt B M ad E M; ſed per lemma ſextum B M ad E M habet maiorem rationem, quam I ad G; ergo N ad K habebit maiorem rationem, quam ſit ratio duplicata O E ad O B, ideſt quam I ad G; vt autem G ad H, ita I ad N; ergo per perturbatam Analogiam I ad K habet maiorem rationem, quam ad H, ergo H ſuperat K.

PROPOSITIO III. ZETETICA.

Inuenire maximum ſolidum, quod poſſit applicari dato plano, deficiens ſolido ſimili dato, & datum, cui debeat aſſimilari defectus ſit cubus.



It datum B planum, & oporteat illud ita ſecare, vt ſi alteri ſegmento applicetur ſolidum deficiens cubo ſit maximum omniũ, quæ poſſint applicari deficientium figura ſimili, ſimiliterque poſita.

Cum defectus debeat eſſe cubus, oportet planum datum applicare lateri cubi defectiui. Sit illud latus A, erit alterum latus, quod exurget ex applicatione B plani ad A; ideſt $\frac{\text{B planum}}{\text{A}}$, quod in duo ſegmenta ſecabitur, quorum alterum erit A, alterum erit $\frac{\text{B planum}}{\text{A}}$ minus A, quæ pars ducta in ipſius A quadratum exurget planum applicatum, ideſt B planum in A minus A cubo; reliquum eſt, vt determinetur quantitas ipſius A, vt B planum in A minus A cubo ſit maximum.

Per ſuperiorem Methodum ſit E æquale nihilo, & ſu-

ſumatur A plus E pro vno latere, ad quod applicetur B planum, erit latus alterum ex applicatione exurgens $\frac{B\ planum}{A\ plus\ E}$, cuius alterum ſegmentum erit A plus E, alterum $\frac{B\ planum}{A\ plus\ E}$ minus A minus E. Hoc vltimum ſegmentum ductum in quadratum ex latere A plus E; ideſt in quadratum ex A plus duplici rectangulo ex A in E plus quadrato ex E, erit planum applicatum, ideſt B planum in A plus B plano in E minus A cubo minus triplici ſolido ex A quadrato in E minus triplici ſolido ex A in E quadratum minus E cubo; & horum ſolidorum differentia erit B planum in E minus triplici ſolido ex A quadrato in E minus triplici ſolido ex A in E quadratum minus E cubo, quæ differentia æquabitur nihilo; Quare facta Antitheſi, erit B planum in E æquale triplici ſolido ex A quadrato in E plus triplici ſolido ex A in E quadratum plus E cubo; & ſi vtraq; pars applicetur ad E, erit B planum æquale triplici quadrato ex A plus triplici rectangulo ex A in E plus quadrato ex E; & quia E ſupponitur æquari nihilo, erit etiam factum in E æquale nihilo. Quare B planum æquabitur triplici quadrato ex A: Tertia igitur pars ipſius B plani erit quadratum ex A. Quocirca maximum ſolidum erit, quod ad duas ex tribus partibus B plani applicabitur: ſumenda igitur erit ipſius B plani pars tertia, & inquirendum latus, quod ipſam poteſt, ad quod applicato B plano exurget longitudo tripla lateris, cui facta eſt applicatio, cuius duæ partes in reliquæ quadratum ductæ conſtituent maximum ſolidum applicatum deficiens cubo. Hinc

PORISMA.

Maximum ſolidum, quod poteſt applicari dato plano deficiens cubo eſt id, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani.

THEOREMA.

Omnium ſolidorum ad idem planum applicatorum, & deficientium figuris ſolidis ſimilibus, ſimiliterq; poſitis maximum eſt id, quod ad duas tertias partes dati plani applicatur.

SIt planum datum A B in B D, & B C ſit æqualis tertiæ parti ipſius B D, erit A B, ſeu C I in B C tertia pars plani dati, & C I in C D æquabit reliquas duas tertias partes dati plani. Fiat ex C I in C D in C O ſolidum deficiens ſolido ex C I in C B in C O. Dico hoc fore maximum omnium eorum, quæ applicari poterint dato plano deficientium ſolido ſimili ſimiliterq; poſito ſolido ex C I in C B in C O.

Fiat planum F B in B G æquale plano dato A B in B D, & ſumatur B E maior B C; & compleatur figura B E in E K ſimilis figuræ B C in C I; & vt B C ad B E, ita fiat C O ad E P; erit ſolidum ex E K in E B in E P ſimile, ſimiliterq; poſitum ſolido ex C I in C B in C O;

&

& solidum ex E P in E K in E G erit applicatum minori parti dati plani, quam sint ipsius duæ tertiæ partes (cum B E in E K superet B C in C I tertiam partem dati plani) deficiens solido simili, similiterq; posito ei, quo deficit planum applicatũm duabus tertijs partibus dati plani. Quare

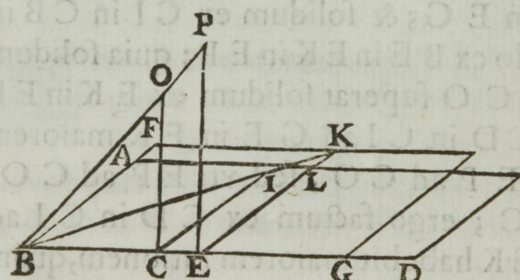
Dico primo solidum ex C I in C D in C O superare solidum ex E K in E P in E G.

Analysis primæ partis.

SVperet solidum ex C I in C D in C O solidum ex E K in E P in E G; & solidum ex C I in C B in C O sit simile solido ex B E in E K in E P; quia solidum ex C I in C D in C O superat solidum ex E K in E P in E G, habebit C D in C I ad G E in E K maiorem rationem, quam E P ad C O; sed vti E P ad C O, ita est B E ad B C; ergo factum ex C D in C I ad factum ex G E in E K habebit maiorem rationem, quam B E ad B C; sed G E in E K æquatur facto ex C I in B D minus facto ex B E in E K; ergo factum ex C D in C I ad factum ex C I in B D minus facto ex B E in E K habet maiorem rationem, quam B E ad B C; & factum sub extremis superabit factum sub medijs; ergo solidum ex B C in C D in C I superabit solidum ex B E in C I in B D minus solido ex B E quadrato in E K; & per Antithesim solidum ex B C in C D in C I, vna cum solido ex B E quadrato in E K superabit solidum ex B E in C I in B D: Quia verò C D est æqualis duplici B C, erit solidum ex B C in C D in C I æquale solido ex duplici B C quadrato in C I; item,

quia

quia B E eſt æqualis B C plus C E, & B D eſt æqualis triplici B C, erit factum ex B E in B D æquale triplici B C quadrato plus triplici rectangulo ex C E in B C: idcircò factum ex B E in C I in B D erit æquale facto ex triplici B C quadrato in C I plus triplici ſolido ex B C in C E in C I; Quare interpretando factum ex duplici quadrato ex B C in C I, vna cum facto ex B E quadrato in E K ſuperabit ſolidum ex triplo quadrato B C in C I, vna cum ſolido ex tripla B C in C E in C I; & demptis communibus, ideſt facto ex duplici quadrato ex B C in C I, erit factum ex B E quadrato in E K maius ſolido ex B C quadrato in C I, vna cum ſolido ex tripla B C in C E in C I; Quare B E quadratum ad quadratum ex B C plus triplo facto ex B C in C E habebit maiorem rationem, quam C I ad E K, ſeu per conſtructionem, quam B C ad B E; ergo factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs; Quare cubus ex B E ſuperabit cubum ex B C plus triplici ſolido ex B C quadrato in C E, quod patet; quia interpretando B E in B C plus C E erit cubus ex B E æqualis cubo ex B C plus triplici ſolido ex B C quadrato in C E plus triplici ſolido ex C E quadrato in B C plus cubo ex C E. Quare ad Syntheſim.



Syn-

Synthesis primæ partis.

QVia B E eſt æqualis B C plus C E, erit cubus ex B E æqualis cubo ex B C plus triplici ſolido ex B C quadrato in C E plus triplici ſolido ex C E quadrato in B C plus cubo ex C E; quare ſuperabit cubum ex B C plus triplici ſolido ex B C quadrato in C E; & ideò B E quadratum ad B C quadratum plus triplici facto ex B C in C E habebit maiorem rationem, quam B C ad B E, ideſt C I ad E K, & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs; ſolidum igitur ex quadrato B E in E K ſuperabit ſolidum ex B C quadrato in C I, vna cum ſolido ex triplici B C in C E in C I; vtrique parti addatur factum ex duplici quadrato B C in C I; factum ex duplici quadrato ex B C in C I vna cum facto ex B E quadrato in E K ſuperabit ſolidum ex triplici quadrato B C in C I vna cum ſolido ex tripla B C in C E in C I. Quia verò C D eſt æqualis duplici B C, erit factum ex duplici quadrato ex B C in C I æquale ſolido ex B C in C D in C I; & quia B E eſt æqualis B C plus C E, & B D eſt æqualis triplici B C, erit factum ex B E in B D æquale triplici B C quadrato plus triplici rectangulo ex C E in B C; idcircò factum ex triplici B C quadrato in C I plus triplici ſolido ex B C in C E in C I, erit æquale facto ex B E in C I in B D. Quamobrem interpretando ſolidum ex B C in C D in C I vna cum ſolido ex B E quadrato in E K ſuperabit ſolidum ex B E in C I in B D; & per Antitheſim ſolidum ex B C in C D in C I ſuperabit ſoli-

dum ex B E in B D in C I minus solido ex quadrato B E in E K; ergo factum ex C D in C I ad factum ex C I in B D minus facto ex B E in E K habebit maiorem rationem, quam B E ad B C; sed factum ex C I in B D minus facto ex B E in E K est factum ex G E in E K; (nam C I in B D per constructionem æquatur facto ex E K in B G.) ergo factum ex C D in C I ad factum ex G E in E K habet maiorem rationem, quam B E ad B C; sed, vt B E ad B C, ita est E P ad C O: ergo factum ex C D in C I ad factum ex G E in E K habet maiorem rationem, quam E P ad C O; ergo C D in C I in C O superat E P in E G in E K, quod erat demonstrandum. Solidum igitur, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani deficiens solido simili dato superat solidum, quod applicatur parti minori, quam sint duæ tertiæ partes dati plani deficiens solido simili, similiterq; posito. Reliquum est vt demonstretur superare etiam id, quod applicatur parti maiori, quã sint duæ tertiæ dati plani; Quare ad Analysim secũdæ partis.

Analysis secundæ partis.

Sit in diagrammate secundo planũ datum A B in B D, & B C sit æqualis tertiæ parti ipsius B D, erit C I

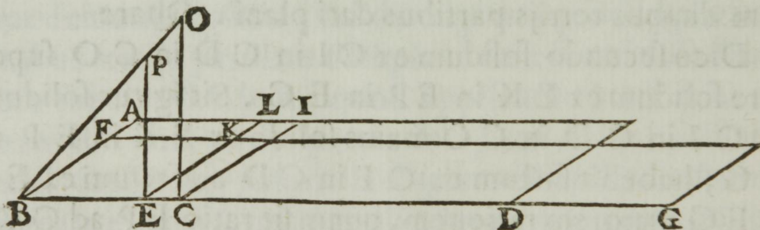
in B C tertia pars plani dati, & C I in C D æquabit

reliquas

reliquas duas tertias partes; fiat ex C I in C D in C O solidum deficiens solido ex C I in C B in C O. Tum facto plano F B in B G æquali plano dato ex A B in B D, sumatur B E minor, quam B C, completaque figura B E in E K, quæ sit similis figuræ B C in C I; & vt B C ad B E, ita fiat C O ad E P; ita, vt solidum ex E K in E B in E P sit simile, similiterq; positum solido ex C I in C B in C O, & solidum ex E P in E K in E G erit applicatum parti maiori dati plani, quam sint ipsius duæ tertiæ partes, cum B E in E K deficiat à B C in C I tertia parte dati plani, & deficiet solido simili, similiterq; posito ei, quo deficit planum applicatum duabus tertijs partibus dati plani. Quare

Dico secundo solidum ex C I in C D in C O superare solidum ex E K in E P in E G. Sit igitur solidum ex C I in C D in C O maius solido ex E K in E P in E G, habebit factum ex C I in C D ad factum ex E K in E G maiorem rationem, quam sit ratio E P ad C O; sed E P ad C O est vti B E ad B C; & quia per constructionem factum ex C I in B D æquatur facto ex E K in B G, erit factum ex E K in E G æquale facto ex C I in B D, minus facto ex B E in E K; ergo factum ex C I in C D ad factum ex C I in B D minus facto ex B E in E K habet maiorem rationem, quam B E ad B C, & factum sub extremis superabit factum sub medijs. Quare solidum ex C I in B C in C D superabit solidum ex C I in B D in B E minus solido ex B E quadrato in E K; & per Antithesim solidum ex B E quadrato in E K maius erit solido ex C I in B D in B E minus solido ex C I in B C in C D; & quia

B D æquatur triplici B C, & C D duplici B C, & B C æquatur B E plus C E, erit per interpretationem C I in B D in B E æquale triplici ſolido ex C I in B C in B E, & C I in B C in C D erit æquale facto ex duplici C I in B C in B E plus duplici ſolido ex C I in B C in C E. Solidum igitur ex C I in B C in B E minus ſolido ex C I in B C in B D erit æquale ſolido ex C I in B C in B E minus duplici ſolido ex C I in B C in C E; quare ſolidum ex B E quadrato in E K ſuperat ſolidum ex C I in B C in B E minus duplici ſolido ex C I in B C in C E; Quadratum igitur ex B E ad factum ex B C in B E minus duplici facto ex B C in C E habet



maiorem rationem, quam C I ad E K, ideſt B C ad B E; & cubus ex B E ſuperabit ſolidum ex quadrato B C in B E minus duplici facto ex B C quadrato in C E, ideſt (quia B E æquatur B C minus C E) cubum ex B C minus triplici facto ex B C quadrato in C E; cubus autem ex B E eſt cubus ex B C minus C E, ideſt cubus ex B C minus triplici facto ex B C quadrato in C E plus triplici facto ex C E quadrato in B C minus cubo ex C E; cum autem ſuperet cubum ex B C minus triplici facto ex B C quadrato in C E, ſi fiat Antitheſis, & tollantur communia, erit triplex factum ex C E quadrato in B C maius cubo ex C E, quod patet, quia B C ſuperat C E. Quare ad Syntheſim.

Syn-

Synthesis secundæ partis.

QVia triplex factum ex quadrato C E in B C superat cubum ex C E; nam B C superat C E; si vtriq; parti addatur cubus ex B C minus triplici facto ex quadrato B C in C E minus cubo ex C E, etiam cubus ex B C minus triplici facto ex B C quadrato in C E plus triplici facto ex C E quadrato in B C minus cubo ex C E; idest per interpretationem cubus ex B E (nam B E est æqualis B C minus C E) erit maior cubo ex B C minus triplici facto ex B C quadrato in C E, idest facto ex B C quadrato in B E minus duplo facto ex B C quadrato in C E; ergo B E quadratum ad factum ex B C in B E minus duplici facto ex B C in C E habebit maiorem rationem, quam B C ad B E, idest C I ad E K; & solidum ex B E quadrato in E K erit maius solido ex B E in B C in C I minus duplici solido ex B C in C E in C I; & quia B D æquatur triplici B C, & C D æquatur duplici B C, & C E æquatur B C minus B E, erit solidum ex B E in B C in C I minus duplici solido ex B C in C E in C I æquale solido ex C I in B D in B E minus solido ex C I in B C in C D. Quare solidum ex B E quadrato in E K maius erit solido ex C I in B D in B E minus solido ex C I in B C in C D; & per Antithesim solidum ex C I in B C in C D maius erit solido ex C I in B D in B E minus solido ex B E quadrato in E K: Quare factum ex C I in C D ad factum ex C I in B D minus facto ex B E in E K habet maiorem rationem, quam B E ad B C; sed quia factum ex C I in B D

eſt æquale facto ex E K in B G, erit factum ex C I in B D minus facto ex B E in E K æquale facto ex E K in E G: Quare factum ex C I in C D ad factum ex E K in E G habebit maiorem rationem, quam B E ad B C; ſed vti B E ad B C, ita eſt E P ad C O: ergo factum ex C I in C D ad factum ex E K in E G habet maiorem rationem, quam E P ad C O; & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs; ergo ſolidum ex C I in C D in C O ſuperabit ſolidum ex E K in E G in E P, quod erat demonſtrandum.

Cum igitur demonſtratum ſit ſolidum, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani ſuperare tam id, quod applicatur parti minori, quam ſint duæ tertiæ partes dati plani, quam id, quod applicatur parti maiori cum defectu ſimili, ſimiliterq; poſito patet id eſſe omnium maximum, quod ſumpſimus demonſtrandum.

SCHOLIVM.

VT hæc propoſitio proponatur, & demonſtretur per lineas homologas data rationali, aduertendum eſt, quando quæritur maximum ſolidum, quod applicari poſſit dato plano deficiens cubo, id obtineri ſecto dato plano, ita, vt altero ſegmento in quadratum efformato, ſi reliquum dati plani applicetur lateri effecti quadrati; & fiat parallelepipedum, cuius baſis ſit reliquum dati plani, & altitudo latus effecti quadrati, id ſit omnium maximum. Vt autem hæc omnia ad lineas homologas reducantur, poſita linea rationali, quærenda prius erit linea, quæ ſit ſimilis dato plano, iuxta ea, quæ in Iſagoge docuimus, quæ erit tertia proportionalis, poſita rationali prima,

&

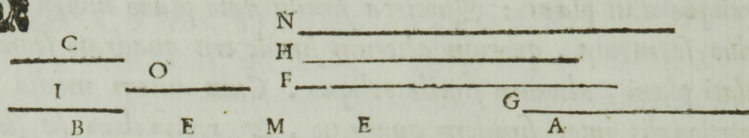
& ea, quæ potest datum planum secunda; tum etiam inuenienda est similis quadrato segmenti dati plani, quæ erit tertia proportionalis, posita rationali prima, & ea, quæ potest segmentum dati plani secunda, quæ si subtrahatur à simili dato plano, cum sit ipsa minor (nam est similis ipsius parti) reliqua erit similis reliquo dati plani: Quocirca similis dato plano diuisa erit in duo segmenta, quorum alterum simile erit quadrato segmenti dati plani, alterum simile reliquo. Cum autem media proportionalis inter similem quadrato, & rationalem sit similis lateri quadrati, & quod fit ex simili residuo plani in similem lateri quadrati sit simile solido, quod applicatur plano deficiens cubo; in hoc recidet quæstio, vt posita rationali, ita secetur linea similis dato plano, vt similis ei, quod fit ex altero segmento ducto in mediam proportionalem inter rationalem, & aliud segmentum sit omnium maxima; & demonstrabimus, tunc fore omnium maximam, quando alterum segmentum, quod ducitur in medio loco proportionalem inter rationalem, & alterum segmentum fuerit alterius segmenti duplum; Quare ita proponi poterit.

Eadem propositio proposita, & demonstrata per lineas homologas, data rationali.

Datis duabus rectis lineis, quarum altera, se habens loco rationalis sit non secta, altera verò secta vtcunq; & alterum segmentum sectæ habeat ad aliam rationem subduplicatam eius, quam habet rationalis ad alterum

terum segmentum. Dico hanc fore omnium maximam, quando segmentum illud fuerit alterius duplum.

It data rationalis C, & altera B A, quæ prius



secetur in M; ita, vt M A sit dupla ipsius B M, secundo, vtcunq; in E; ita vt B E sit maior, aut minor, quam B M, & I sit medio loco proportionalis inter C, & B M, & O inter C, & B E, & fiat, vt C ad I, ita M A ad F, & vt C ad O, ita E A ad H. Dico F superare H; quia cum C & I, & B M, item C & O, & B E sint duæ series continuè proportionalium ab eadem incipientium habebit B M ad B E, per lemma secundum, duplicatam rationem eius, quam habet I ad O: Si igitur inter B M, & B E ponatur media proportionalis, verbigratia G, habebit B M ad G eam rationem, quam habet I ad O; sed, per lemma septimum, B M ad G habet maiorem rationem, quam A E ad A M, ergo I ad O habebit maiorem rationem, quam A E ad A M; tum sic

Fiat, vt O ad H, ita I ad N; tum considerentur tres quantitates I, O, H, & aliæ tres I, N, F,

Quia vt C ad M A, ita I ad F, & vt O ad H, ita C ad E A, erit ratio I ad F minus ratione O ad H æqualis rationi E A ad M A, sed, vti O ad H, ita facta est ratio I ad N, ergo ratio N ad F erit æqualis

rationi

rationi E A ad M A ; ergo I ad O habebit maiorem rationem, quam N ad F, ſed vt O ad H, ita I ad N; ergo per rationem perturbatam I ad H habebit maiorem rationem, quam ad F; ergo F ſuperat H, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IV. ZETETICA.

Inuenire maximum plano planum, quod poſſit applicari datæ lineæ deficiens plano plano ſimili dato; & datum, cui debeat aſſimilari defectus ſit quadrato quadratum.



SIT data recta B, cui applicandum ſit plano planum deficiens quadrato quadrato, quod ſit omnium maximum; oportebit, ita ſecare datam B, vt quod fit ex altero ſegmento in alterius ſegmenti cubum ſit omnium maximum.

Sit rectæ B alterum ſegmentum A erit alterum B minus A, & plano planum applicatum erit id, quod fit ex B in A cubum minus A quadrato quadrato; determinanda autem eſt proportio partium A, & B minus A, vt hoc productum ſit omnium maximum.

Iuxta traditam methodum ponatur E æquale nihilo, & fiat alterum ſegmentum A plus E, & alterum B minus A minus E. Cubus ex A plus E erit æqualis cubo ex A plus triplici ſolido ex A quadrato in E plus triplici ſolido ex E quadrato in A plus cubo ex E, quæ omnia ſi ducantur in B minus A minus E, exurget plano planum ex B in A cubum plus triplici plano

plano ex B in A quadratum in E plus triplici plano plano ex B in E quadratum in A plus plano plano ex B in E cubum minus A quadrato quadrato minus quadruplici plano plano ex A cubo in E minus ſextuplo plano plano ex E quadrato in A quadratum minus quadruplici plano plano ex A in E cubum minus quadrato quadrato ex E; à quo facto ſi dematur factum ex B in A cubum minus A quadrato quadrato, erit reliquum æquale nihilo; quare facta Antitheſi triplex plano planum ex B in A quadratum in E plus triplici plano plano ex B in A in E quadratum plus plano plano ex B in E cubum erit æquale quadruplo plano plano ex A cubo in E plus ſextuplo plano plano ex E quadrato in A quadratum plus quadruplo plano plano ex A in E cubum plus E quadrato quadrato; & ſi omnia applicentur ad E; erit triplex ſolidum ex B in A quadratum plus triplici ſolido ex B in A in E plus ſolido ex B in E quadratum æquale quadruplo cubo ex A plus ſextuplo ſolido ex E in A quadratum plus quadruplo ſolido ex A in E quadratum plus E cubo; & quia E æquatur nihilo, reiectis omnibus ijs, quæ non potuerunt liberari ab E; erit triplex ſolidum ex B in A quadratum æquale quadruplo cubo ex A; & ſi vtraq; pars applicetur ad A quadratum, erit triplex B æquale quadruplici A; & A, vndè efficitur quadrato quadratum erit æquale tribus ex quatuor partibus ipſius B; & reliqua quarta pars ipſius B erit illa, cui applicandum erit maximum plano planum. Hinc

PORISMA.

Maximum plano planum, quod applicatur datæ lineæ deficiens quadrato quadrato est id, quod applicatur quartæ parti datæ lineæ, & quadrato quadratum, quod deficit occupat tres quartas partes datæ lineæ.

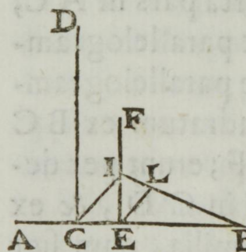
THEOREMA.

Omnium plano planorum ad eandem lineam applicatorum, & deficientium plano planis similibus, similiterq; positis maximum est id, quod quartæ parti datæ lineæ applicatur.

SIT data recta A B, cuius quarta pars sit A C, & A E primo superet A C, & parallelogrammum ex B C in C I sit simile parallelogrammo ex B E in E L. Fiat autem, vt quadratum ex B C ad quadratum ex B E, ita C D ad E F; erunt per definitionem primam facta ex B C in C I in C D, & ex B E in E L in E F duo plano plana similia, cum sint parallelepipeda super similibus basibus constituta, quorum altitudines sunt in duplicata ratione laterum homologorum similium basium; Quocirca facta parallelepipeda ex A C in C D in C I, & ex A E in E F in E L erunt plano plana eidem lineæ A B applicata deficientia plano planis similibus similiterq; positis, quorum factum ex A C in C D in C I applicatum est quartæ parti datæ lineæ; alterum verò scilicet factum ex A E in E F in E L applicatum est parti maiori, quam sit quarta pars datæ lineæ. Quare dico primo factum ex A C in C D in C I superare factum ex A E in E F in E L.

Analysis primæ partis.

QVia parallelepipedum ex A C in C I in C D supponitur superare parallelepipedum ex A E in E L in E F, habebit C I ad E L maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D; sed C I ad E L est, vt B C ad B E; seu per interpretationem, vt tripla A C ad triplam A C minus C E; ergo tripla A C ad triplam A C minus C E habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D; sed E F ad C D est, vti quadratum ex B E ad quadratum ex B C; ergo factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D erit, vt factum ex A E in quadratum ex B E ad factum ex A C in quadratum ex B C; Quare tripla A C ad triplam A C minus C E habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in quadratum ex B E ad factum ex A C in quadratum ex B C; sed quadratum ex B E idem est, ac quadratum ex tripla A C minus C E, idest noncuplum quadratum ex A C minus sextuplo rectangulo ex A C in C E plus quadrato ex C E; & quadratum ex B C idem est, ac quadratum ex tripla A C, idest noncuplum ipsius A C quadratum, & A E est æqualis A C plus C E; Quare per interpretationem factum ex A E in quadratum ex B E erit factum ex A C plus C E in quadratum ex tripla A C minus C E; idest noncuplum cubi ex A C plus triplo solido ex A C quadrato in



C E minus quintuplo ſolido ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E; factum verò ex A C in quadratum ex B C erit noncuplum cubi ipſius A C; Quare tripla A C ad triplam A C minus C E habebit maiorem rationem, quam noncuplum cubi ex A C plus triplo ſolido ex A C quadrato in C E minus quintuplo ſolido ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E ad noncuplum cubi ex A C; & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs; igitur viceſimum ſeptuplum quadrato quadratum ex A C ſuperabit viceſimum ſeptuplum quadrato quadratum ex A C minus plano plano decies octies ſumpto ex A C quadrato in quadratum C E plus octuplo plano plano ex A C in C E cubum minus quadrato quadrato ex C E; & reiecto communi viceſimo ſeptuplo quadrato quadrato ex A C, & facta Antitheſi, erunt decem, & octo plano plana ex A C quadrato in C E quadratum maiora octuplo plano plano ex A C in C E cubum minus quadrato quadrato ex C E, & ſi omnia applicentur ad quadratum ex C E erunt decem, & octo quadrata ex A C maiora octuplo facto ex A C in C E minus quadrato ex C E, quod verum eſſe patebit ex ſequenti lemmate.

L E M M A.

Datis duabus rectis lineis; ita vt altera deficiat ab alterius tripla erunt decem, & octo vnius quadrata ſimul ſumpta maiora octu-

plo

plo ſub ipſis rectangulo minus alterius quadrato.

A
B

Sint duæ rectæ datæ A, & B, & B deficiat à tripla ipſius A. Dico decem, & octo quadrata ipſius A ſimul ſumpta ſuperare octuplum rectangulum ex A in B minus quadrato ipſius B.

Plures caſus habet hæc propoſitio, aut enim B deficit ab A, aut eſt æqualis, aut ſuperat, & deficit à dupla, aut eſt æqualis duplæ, aut ſuperat duplam, ſed deficit à tripla.

Si B deficit ab A, aut eſt ipſi æqualis patet propoſitio; nam octuplum ſub ipſis rectangulum, aut deficiet ab octo quadratis ipſius A, aut æquabit; vtcunque ſit ſemper deficiet à decem, & octo quadratis.

Sit B maior quam A, ſed deficiat ab ipſius dupla; ſit autem æqualis A plus I; ergo I deficiet ab A, & octuplum rectangulum ex A in A plus I erit æquale octuplo quadrato ipſius A plus octuplo rectangulo ex A in I, ſed cum I deficiat ab A octuplum rectangulum ex A in I deficiet ab octuplo quadrato ipſius A; ergo octuplum rectangulum ex A in A plus I deficiet à ſexdecim quadratis ipſius A; ergo multo magis à decem, & octo, & defectus erit maior ſi tollatur etiam quadratum ex A plus I.

Sit B æqualis duplici A erit octuplum rectangulum ex A in B æquale ſexdecim quadratis ex A, & ſi auferatur quadratum ex B, ideſt quadruplum quadratum ipſius A, quia B eſt æqualis duplici A remanebunt

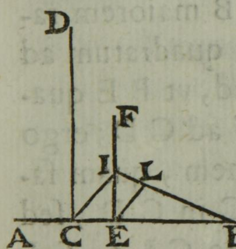
qua-

quatuordecim quadrata ex A, quæ minus ſunt, quam decem, & octo.

Sit B æqualis duplici A plus I, & I deficiat ab A erit octuplum rectangulum ex A in B minus B quadrato æquale duodecuplo quadrato ex A plus quadruplo rectangulo ex A in I minus quadrato ex I; & quia I deficit ab A, etiam quadruplum rectangulum ex A in I deficiet à quadruplo quadrato ex A; quare totum deficiet à decem, & octo quadratis ex A, quod erat demonſtrandum. Quare ad Syntheſim.

Syntheſis primæ partis.

QVia C E deficit à tripla A C, erunt decem, & octo quadrata ex A C maiora octuplo plano ex A C in C E minus quadrato ex C E, & ſi omnia ducantur in quadratum ex C E, erunt decem, & octo plano plana ex quadrato A C in quadratum ex C E maiora octuplo plano plano ex A C in C E cubum, minus quadrato quadrato ex C E; ſi vtriq; parti addatur viceſimum ſeptuplum quadrato quadratum ex A C, & fiat Antitheſis; erunt viginti ſeptem quadrato quadrata ex A C maiora viginti ſeptem quadrato quadratis ex A C minus decem, & octo plano planis ex quadrato A C in C E quadratum plus octuplo plano plano ex A C in C E cubum minus quadrato quadrato ex C E; & quia viceſimum ſeptuplum quadrato quadratum ex A C fit ex tripla A C in noncuplum cubi ex A C, & viceſimum ſeptuplum quadrato quadratum



dratum

dratum ex A C minus decem, & octo plano planis ex quadrato A C in C E quadratum plus octuplo plano plano ex A C in C E cubum minus quadrato quadrato ex C E fit ex tripla A C minus C E in noncuplum cubi ex A C plus triplo solido ex A C quadrato in C E minus quintuplo solido ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E; habebit tripla A C ad triplam A C minus C E maiorem rationem, quam noncuplum cubi ex A C plus triplo solido ex A C quadrato in C E minus quintuplo solido ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E ad noncuplum cubi ex A C: & quia noncuplum cubi ex A C plus triplo solido ex A C quadrato in C E minus quintuplo solido ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E est factum ex A C plus C E, idest A E in quadratum ex tripla A C minus C E; idest B E quadratum; & noncuplum cubi ex A C est factum ex A C in quadratum triplæ A C, idest B C quadratum; habebit tripla A C, idest B C ad triplam A C minus C E, idest E B maiorem rationem, quam factum ex A E in B E quadratum ad factum ex A C in B C quadratum; sed, vt B E quadratum ad B C quadratum, ita est E F ad C D; ergo B C ad B E habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D; sed vt B C ad B E, ita C I ad E L; ergo C I ad E L habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D; & factum sub extremis superabit factum sub medijs; ergo factum ex C I in C A in C D superabit factum ex E L in A E in E F, quod erat primo loco demonstrandum.

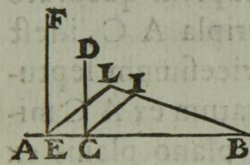
Ana-

Analysis secundæ partis.

SIT A E minor, quam A C, ideſt quam quarta pars totius A B, & ſit ipſi A E applicatum parallelepipedum ex A E in E F in E L deficiens plano plano ſimili plano plano, quo deficit parallelepipedum applicatum quartæ parti ipſius A B, ideſt ex A C in C I in C D.

Dico ſecundo parallelepipedum ex A C in C I in C D ſuperare parallelepipedum ex A E in E F in E L.

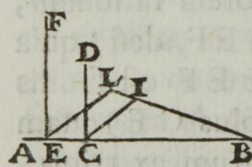
Quia parallelepipedum ex A C in C I in C D ſupponitur ſuperare parallelepipedum ex A E in E F in E L, habebit C I ad E L maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D; ſed C I ad E L eſt, vti B C ad B E, ideſt, vti tripla A C ad triplam A C plus C E; ergo tripla A C ad triplam A C plus C E habet maiorem rationem, quam factum ex A E in E F, ideſt (quia A E eſt æqualis A C minus C E, & E F eſt ſimilis quadrato ex B E, ideſt ex tripla A C plus C E) quam factum ex A C minus C E in quadratum ex tripla A C plus C E, ad factum ex A C in C D, ideſt (quia C D eſt ſimilis quadrato ex B C, ſeu ex tripla A C) quam factum ex A C in quadratum triplæ A C; Quare tripla A C ad triplam A C plus C E habet maiorem rationem, quam noncuplum cubi ex A C minus triplo ſolido ex A C quadrato in C E minus quintuplo ſolido ex A C in C E quadratum minus cubo ex C E ad noncuplum cubi ex A C; & factum ſub



extremis ſuperabit factum ſub medijs. Quare viceſimum ſeptuplum quadrato quadratum ex A C ſuperabit viceſimum ſeptulum quadrato quadratum ex A C minus decem, & octo plano planis ex A C quadrato in C E quadratum minus octuplo plano plano ex A C in C E cubum, minus quadrato quadrato ex C E, quod patet. Quare ad Syntheſim.

Syntheſis ſecundæ partis.

QVia viceſimum ſeptuplum quadrato quadratum ex A C ſuperat viceſimum ſeptuplum quadrato quadratum ex A C minus decem, & octo plano planis ex A C quadrato in C E quadratum minus octuplo plano plano ex A C in C E cubum minus quadrato quadrato ex C E, & viceſimum ſeptuplum quadrato quadratum ex A C eſt id, quod fit ex tripla A C, ideſt C B in noncuplum cubi ex A C; & viceſimum ſeptuplum quadrato quadratum ex A C minus decem, & octo plano planis ex A C quadrato in C E quadratum minus octuplo plano plano ex A C in C E cubum minus quadrato quadrato ex C E eſt id, quod fit ex tripla A C plus C E, ideſt B E in noncuplum cubum ex A C minus triplo ſolido ex A C quadrato in C E minus quintuplo ſolido ex A C in C E quadratum minus cubo ex C E, habebit C B ad B E maiorem rationem, quam noncuplum cubi ex A C minus triplo ſolido ex A C quadrato in C E minus quintuplo ſolido ex A C in C E quadratum minus cubo ex C E, ideſt, quam factum ex A C minus



nus

nus C E, ideſt A E in quadratum ex tripla A C plus C E, ideſt quadratum ex B E, ad noncuplum cubi ex A C, ideſt ad factum ex A C in quadratum triplæ A C ideſt in B C quadratum; habebit igitur C B ad B E maiorem rationem, quam factum ex A E in quadratum ex B E ad factum ex A C in quadratum ex B C; ſed vt quadratum ex B E ad quadratum ex B C, ita eſt ex conſtructione E F ad C D; ergo factum ex A E in quadratum ex B E ad factum ex A C in quadratum ex B C erit, vt factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D; ergo C B ad B E habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D; ſed vt C B ad B E, ita eſt C I ad E L; ergo C I ad E L habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D, & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs; factum igitur ex C I in A C in C D ſuperabit factum ex E L in A E in E F, quod erat demonſtrandum.

Cum igitur plano planum, quod applicatur quartæ parti datæ rectæ ſuperet, tam plano planum, quod applicatur parti maiori, quam ſit quarta pars, quam illud, quod applicatur parti minori cum ſimili defectu, erit omnium maximũ, quod propoſuimus demonſtrandum.

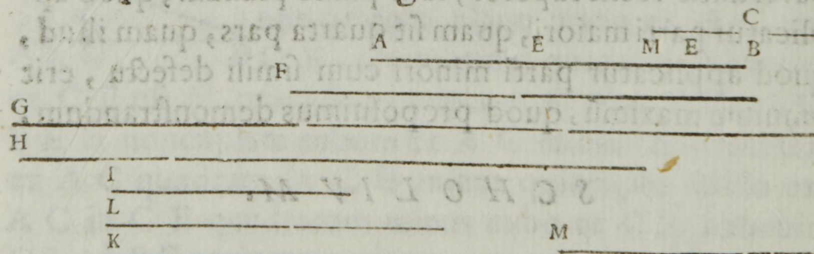
SCHOLIVM.

VT hæc propoſitio exibeatur per lineas homologas data rationali; Cum datarum altera ita ſecanda ſit, vt plano planum, quod ſit ex altero ſegmento in alterius ſegmenti cubum ſit omnium maximum, prius inuenienda erit ſimilis

cubo alterius segmenti, quæ erit illa, ad quam rationalis habet triplicatam rationem eius, quam habet ad segmentum; Quare similis facto ex vno segmento in cubum alterius segmenti erit illa, ad quam vnum ex segmentis habebit illam rationem, quam habet rationalis ad similem cubo alterius segmenti, idest triplicatam eius, quam habet ad segmentum.

Eadem propositio proposita, & demonstrata per lineas homologas data rationali.

Datis duabus rectis lineis, quarum altera non secta se habeat loco rationalis; altera verò secta sit vtcunque, & alterum segmentum sectæ habeat ad aliam lineam rationem triplicatam eius, quam habet non secta ad alterum segmentum; Dico hanc lineam fore omnium maximam, quando segmentum ad quod refertur non secta æquabit tres quartas partes datæ rectæ, vel fuerit triplum alterius segmenti.



SIT data rationalis C, & altera A B, quæ prius secetur in M; ita vt A M sit tripla ipsius B M, secundo vtcunque in E; ita vt B E sit maior, aut minor,

quam B M, & fiat, vt C ad A M, ita A M ad F, & F ad G; & vt C ad G, ita B M ad H; habebit B M ad H rationem triplicatam eius, quam habet C ad A M: fiat iterum vt C ad A E, ita A E ad I, & I ad L; & vt C ad L, ita B E ad K; habebit B E ad K rationem triplicatam eius, quam habet C ad A E: Quia autem A M æquatur tribus ex quatuor partibus datæ A B, vel quod idem est, est tripla ipsius M B. Dico H superare K.

Fiat vt G ad H, ita L ad M; tum considerentur tres quantitates L, & G, & H, item aliæ tres L, & M, & K; ita, vt ratio L ad H sit composita ex ratione L ad G, & ex ratione G ad H; ratio verò L ad K sit composita ex ratione L ad M, & M ad K. Quia ab eadem C sunt duæ series continuè proportionalium C, & A M, & F, & G; item C, & A E, & I, & L habebit, per lemma secundum, L ad G triplicatam rationem eius, quam habet A E ad A M; sed, ex lemmate octauo, B M ad B E habet maiorem rationem, quam sit ratio triplicata A E ad A M; ergo B M ad B E habebit maiorem rationem, quam L ad G; sed quia per constructionem, vt C ad L, ita B E ad K, erit, vt C ad B E, ita L ad K; item quia per constructionem, vt C ad G, ita B M ad H, erit, vt C ad B M, ita G ad H; sed vt G ad H, ita facta est L ad M; erit igitur L ad M, vt C ad B M; sed quia vt C ad B E, ita L ad K, erit M ad K, vt B M ad B E; ergo M ad K habebit maiorem rationem, quam L ad G; sed quia, vt G ad H; ita L ad M, erit per rationem perturbatam, ratio L ad K maior, quam L ad H; ergo H superat K, quod erat probandum.

PROPOSITIO V. ZETETICA.

Inuenire maximum plano planum, quod poſſit applicari dato plano cum defectu plano plani ſimilis dato,& datum,cui debeat aſſimilari defectus ſit quadrato quadratum.



IT datum B planum, cui ſit applicandum plano planum deficiens quadrato quadrato, quod ſit omnium maximum. Cum plano plani ſegmentum futurum ſit quadratum, vnde componatur quadrato quadratum deficiens. Sit A cui applicetur B planum, ex quo ſi fiat quadratum erit reliquum B plani B planum minus A quadrato, quod ductum in A quadratum producet plano planum ex B plano in A quadratum minus A quadrato quadrato, quod erit plano planum applicatum cum defectu quadrato quadrati.

Iterum loco ipſius A ſumatur A plus E, & E iuxta hanc methodum æquetur nihilo, & ſi ex A plus E fiat quadratum illud erit æquale quadrato ex A plus duplici plano ex A in E, plus quadrato ex E, quod ſi detrahatur à B plano erit reliquum B planum minus quadrato ex A minus duplici plano ex A in E minus quadrato ex E. Quod ductum in A quadratum plus duplici plano ex A in E plus E quadrato producet plano planum ex B plano in A quadratum plus duplici plano plano ex B plano in planum ex A in E plus plano plano ex B plano in E quadratum minus quadrato quadrato

drato ex A minus quadruplo plano plano ex A cubo in E minus ſextuplo plano plano ex A quadrato in E quadratum minus quadruplo plano plano ex A in E cubum minus E quadrato quadrato. Vnde ſi dematur ſuperius factum, ideſt plano planum ex B plano in A quadratum minus A quadrato quadrato, reliquum erit duplex plano planum ex B plano in planum ex A in E plus plano plano ex B plano in E quadratum minus quadruplo plano plano ex A cubo in E minus ſextuplo plano plano ex A quadrato in E quadratum minus quadruplo plano plano ex A in E cubum minus E quadrato quadrato æquale nihilo; Quare facta Antitheſi erit duplex plano planum ex B plano in planum ex A in E vna cum plano plano ex B plano in E quadratum æquale quadruplo plano plano ex A cubo in E plus ſextuplo plano plano ex A quadrato in E quadratum plus quadruplo plano plano ex A in E cubum plus E quadrato quadrato; & ſi omnia applicentur ad E erit duplex factum ex B plano in A vna cum facto ex B plano in E æquale quadruplo cubo ex A plus ſextuplo facto ex A quadrato in E plus quadruplo facto ex A in E quadratum plus E cubo; & reiectis omnibus ijs, quæ ſunt ſub E, nam æquantur nihilo, erit duplex factum ex B plano in A æquale quadruplici cubo ex A; & ſi omnia applicentur ad A, erit duplex B planum æquale quadruplo quadrato ex A; quare A quadratum occupat dimidium dati plani, & plano planum, quod applicatur dato plano deficiens quadrato quadrato eſt id, quod applicatur dimidio dati plani, quod idem eſt ac duabus ex quatuor partibus dati plani: Hinc

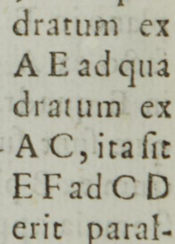
PORISMA.

Maximum plano planum, quod applicatur dato plano deficiens quadrato quadrato, est id, quod applicatur duabus partibus ex quatuor, in quas diuiditur planum, & quadrato quadratum, quod deficit occupat reliquas duas partes.

THEOREMA.

Omnium plano planorum ad idem datum planum applicatorum, & deficientium plano planis similibus, similiterq; positis, maximum est id, quod dimidio dati plani applicatur.

SIT planum datum G A, seu C I in A B, & ei æquale M A seu E L in A Q; & A B diuisa sit bifariam in C, erit factum ex A C in C I dimidium dati plani, cui sit simile factum ex A E in E L, & A E sit primo minor, quam A C, & vt quadratum ex A E ad quadratum ex A C, ita sit E F ad C D erit parallelepipedum ex C D in C I in C B plano planum applicatum dimidio plani dati C I in A B; parallelepipedum vero ex E F in E L in E Q erit plano planum applicatum parti maiori, quam sit dimidium dati plani, & vtrumque deficiet plano plano simili, similiterq; posito. Dico primo



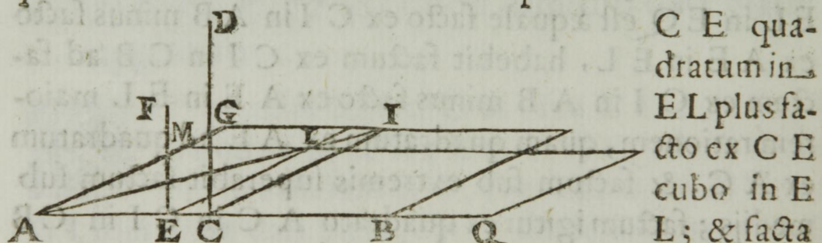
mo

mo parallelepipedum ex C D in C I in C B superare parallelepipedum ex E F in E L, in E Q.

Analysis primæ partis.

QVia parallelepipedum ex C D in C I in C B dicitur superare parallelepipedum ex E F in E L E Q, habebit factum, ex C I in C B ad factum ex E L in E Q maiorem rationem, quam E F ad C D, sed E F ad C D est, vti quadratum, ex A E ad quadratum ex A C; ergo factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q habebit maiorem rationem, quam quadratum ex A E ad quadratum ex A C; quia verò factum ex E L in E Q est æquale facto ex C I in A B minus facto ex A E in E L, habebit factum ex C I in C B ad factum ex C I in A B minus facto ex A E in E L maiorem rationem, quam qnadratum ex A E ad quadratum ex A C, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; factum igitur ex quadrato A C in C I in C B superabit factum ex quadrato A E in C I in A B minus facto ex cubo A E in E L; idest, quia C B est æqualis A C, factum ex cubo A C in C I superabit factum ex quadrato A E in duplicem A C in C I minus facto ex cubo A E in E L; Quia autem A E est æqualis A C minus C E, erit quadratum ex A E æquale quadrato ex A C minus duplici rectangulo ex A C in C E plus quadrato ex C E, & cubus ex A E erit æqualis cubo, ex A C minus triplo solido ex A C quadrato in C E plus triplici solido ex C E quadrato in A C minus cubo ex C E; Quare interpretando factum ex quadrato A E in duplicem A C in C I minus facto

ex cubo A E in E L erit æquale facto ex duplici A C cubo in C I minus quadruplo facto ex A C quadrato in C E in C I plus duplici facto ex A C in C I in C E quadratum minus facto ex A C cubo in E L plus triplo facto ex A C quadrato in C E in E L minus triplo facto ex A C in C E quadratum in E L plus facto ex C E cubo in E L. Factum igitur ex cubo A C in C I superabit factum ex duplici cubo ex A C in C I minus quadruplo facto ex A C quadrato in C I in C E plus duplici facto ex A C in C I in C E quadratum minus facto ex A C cubo in E L plus triplo facto ex A C quadrato in C E in E L minus triplo facto ex A C in C E quadratum in E L plus facto ex C E cubo in E L; & facta



Antithesi erit quadruplum factum ex A C quadrato in C I in C E minus facto ex A C cubo in C I minus facto ex duplici A C in C I in C E quadratum maius triplici facto ex A C quadrato in C E in E L minus facto ex cubo A C in E L minus triplici facto ex A C in C E quadratum in E L plus facto ex cubo C E in E L. Quamobrem C I ad E L habebit maiorem rationem, quam triplex factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E ad quadruplum factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus duplici facto ex A C in C E quadratum; sed, vti C I

ad

ad E L, ita eſt A C ad A E, ideſt A C ad A C minus C E; ergo A C ad A C minus C E habebit maiorem rationem, quam triplex factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E, ad quadruplum factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus duplici facto ex A C in C E quadratum; & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs: Quadruplum igitur factum ex cubo A C in C E minus quadrato quadrato ex A C minus duplici facto ex A C quadrato in C E quadratum ſuperabit quadruplum factum ex A C cubo in C E minus ſextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratũ minus quadrato quadrato ex A C plus quadruplo facto ex A C in C E cubum minus quadrato quadrato ex C E; & additis vtriq; parti quadrato quadrato ex A C vna cum duplici facto ex A C quadrato in C E quadratum, erit quadruplum factum ex cubo A C in C E maius quadruplo facto ex cubo A C in C E minus quadruplo facto ex A C quadrato in C E quadratum plus quadruplo facto ex A C in C E cubum minus quadrato quadrato ex C E; & facta Antitheſi erit quadruplum factum ex A C quadrato in C E quadratum plus quadrato quadrato ex C E maius quadruplo facto ex A C in C E cubum; & ſi omnia applicentur ad C E quadratum, erit quadruplum quadratum ex A C plus quadrato ex C E maius quadruplo facto ex A C in C E, quod patet; nam cum A C ſuperet C E, quadruplum quadratum ex A C ſuperabit quadruplum factum ex A C in C E, & multo magis ſi quadruplo quadrato ex A C addatur quadratũ ex C E. Quare ad Syntheſim.

 Syn-

Synthesis primæ partis.

QVia A C superat C E erit quadruplum quadratum ex A C, vna cum quadrato ex C E maius quadruplo facto ex A C in C E; & si vtraq; pars ducatur in C E quadratum, erit quadruplum factum ex A C quadrato in C E quadratum plus quadrato quadrato ex C E maius quadruplo facto ex A C in C E cubum. Vtrique parti addatur quadruplum factum ex cubo A C in C E, & fiat Antithesis, erit quadruplum factum ex cubo A C in C E maius quadruplo facto ex cubo A C in C E minus quadruplo facto ex A C quadrato in C E quadratum minus quadrato quadrato ex C E, plus quadruplo facto ex A C in C E cubum; & si vtrinque dematur quadrato quadratum, ex A C, vna cum duplici facto, ex A C quadrato in C E quadratum, erit quadruplum factum ex cubo A C in C E minus quadrato quadrato ex A C minus duplici facto ex A C quadrato in C E quadratum maius quadruplo facto ex cubo A C in C E minus quadrato quadrato ex A C minus sextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratum minus quadrato quadrato ex C E plus quadruplo facto ex A C in C E cubum. Hoc est factum ex A C in quadruplum factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus duplici facto ex

A C

A C in C E quadratum superabit factum ex A C minus C E in triplex factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E; ergo A C ad A C minus C E, idest A E habebit maiorem rationem, quam triplex factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E ad quadruplum factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus duplici facto ex A C in C E quadratum; sed vt A C ad A E, ita est C I ad E L; habebit igitur C I ad E L maiorem rationem, quam triplex factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E ad quadruplum factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus duplici facto ex A C in C E quadratum; Quare factum sub extremis superabit factum sub medijs; quadruplum igitur factum ex A C quadrato in C E in C I minus facto ex A C cubo in C I minus facto ex duplici A C in C I in C E quadratum superabit triplex factum ex A C quadrato in C E in E L minus facto ex cubo A C in E L minus triplici facto ex A C in C E quadratum in E L plus facto ex cubo C E in E L. Vtriq; parti addatur duplex factum ex A C cubo in C I, erit factum ex A C cubo in C I plus quadruplo facto ex A C quadrato in C E in C I minus duplici facto ex A C in C I in C E quadratum maius duplici facto ex A C cubo in C I plus triplo facto ex A C quadrato in C E in E L minus facto ex cubo A C in E L minus triplici facto ex A C in C E quadratum in E L plus facto ex

cubo

cubo C E in E L; & facta Antithesi erit factum ex cubo A C in C I maius duplici facto ex cubo A C in C I minus quadruplo facto ex A C quadrato in C I in C E plus duplici facto ex A C in C I in C E quadratum minus facto ex A C cubo in E L plus triplici facto ex A C quadrato in C E in E L minus triplo facto ex A C in C E quadratum in E L plus facto ex C E cubo in E L, ideſt facto ex quadrato ipſius A C minus C E, ideſt A E, in duplicem A C in C I minus facto ex cubo ipſius A C minus C E, ideſt A E in E L. Igitur factum ex cubo A C in C I ſuperabit duplex factum ex quadrato A E in A C in C I minus facto ex A E cubo in E L; ideſt, quia C B eſt æqualis A C factum ex A C quadrato in C I in C B ſuperabit factum ex quadrato A E in C I in A B, minus facto ex cubo A E in E L. Ergo factum ex C I in C B ad factum ex C I in A B minus facto ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam quadratum ex A E ad quadratũ ex A C, ideſt per conſtructionem, quam E F ad C D; ſed factum ex C I in A B minus facto ex A E in E L eſt æquale facto ex E L in E Q. Ergo factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q habebit maiorem rationem, quam E F ad C D; & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs. Factum igitur ex C I in C B in C D ſuperabit factum ex E L in E F in E Q, quod erat primo loco probandum, quando applicatio ſit parti maiori dati plani, quam ſit ipſius pars dimidia; Quare.

Sit ſecundo planum datum G A, ſeu C I in A B, & ei æquale M A, ſeu E L in A Q, & A B diuiſa ſit

bi-

bifariam in C, erit factum ex A C in C I dimidium dati plani, cui sit simile factum ex A E in E L, & A E excedat A C, &, vt quadratum ex A E ad quadratum ex A C, ita sit E F ad C D, erit parallelepipedum ex C D in C I in C B plano planum applicatum dimidio plani dati C I in A B: parallelepipedum verò ex E F in E L in E Q erit plano planum applicatum parti minori, quam sit dimidium dati plani, & vtrumq; deficiet plano plano simili, similiterq; posito; Quamobrem

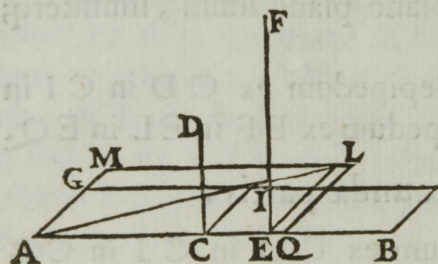
Dico secundo parallelepipedum ex C D in C I in C B superare parallelepipedum ex E F in E L in E Q.

Analysis secundæ partis.

QVia parallelepipedum ex C D in C I in C B dicitur superare parallelepipedum ex E F in E L in E Q, habebit factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q, maiorem rationem, quam E F ad C D, sed E F ad C D est, vti quadratum ex A E ad quadratum ex A C; ergo factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q habebit maiorem rationem, quam quadratum ex A E ad quadratum ex A C; quia verò factum ex E L in E Q est æquale facto ex C I in A B minus facto ex A E in E L, habebit factum ex C I in C B ad factum ex C I in A B minus facto ex A E in E L maiorem rationem, quam quadratum ex A E

ad

ad quadratum ex A C, & factum sub extremis superabit factum sub medijs. Factum igitur ex quadrato A C in C I in C B superabit factum ex quadrato A E in C I in A B minus facto ex cubo A E in E L, idest, quia C B est æqualis A C, factum ex cubo A C in C I superabit factum ex quadrato A E in duplicem A C in C I minus facto ex cubo A E in E L; Quia autem A E est æqualis A C plus C E, erit quadratum ex A E æquale quadrato ex A C plus duplici rectangulo ex A C in C E plus quadrato ex C E, & cubus ex A E erit æqualis cubo ex A C plus triplo solido ex A C quadrato in C E plus triplo solido ex C E quadrato in A C plus cubo ex C E. Quare interpretando factum ex quadrato A E in duplicem A C in C I minus facto ex cubo A E in E L erit æquale facto ex duplici A C cubo in C I plus quadruplo facto ex A C quadrato in C I in C E plus duplici facto ex A C in C I in C E quadratum minus facto ex cubo A C in E L minus triplo facto ex A C quadrato in C E in E L minus triplo facto ex A C in C E quadratum in E L minus facto ex C E cubo in E L; factum igitur ex cubo A C in C I superabit factum ex duplici cubo ex A C in C I plus quadruplo facto ex A C quadrato in C I in C E plus duplici facto ex A C in C I in C E quadratum minus facto ex cubo A C in E L minus triplo facto ex A C quadrato in C E in E L minus

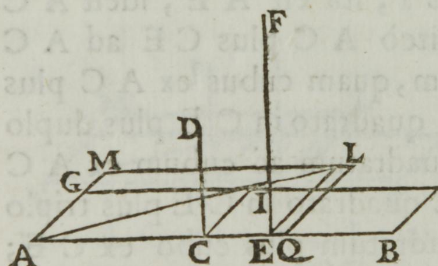


triplo

triplo facto ex A C in C E quadratum in E L minus facto ex C E cubo in E L; & per Antithesim factum ex cubo A C in E L plus triplo facto ex A C quadrato in C E in E L plus triplo facto ex A C in C E quadratum in E L plus facto ex cubo C E in E L superabit factum ex cubo A C in C I plus quadruplo facto ex A C quadrato in C I in C E plus duplo facto ex A C in C I in C E quadratum. Quamobrem E L ad C I habebit maiorem rationem, quam cubus ex A C plus quadruplo facto ex A C quadrato in C E plus duplici facto ex A C in C E quadratum ad cubum ex A C plus triplo facto ex A C quadrato in C E plus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E; sed, vt E L ad C I, ita est A E, idest A C plus C E ad A C; idcircò A C plus C E ad A C habebit maiorem rationem, quam cubus ex A C plus quadruplo facto ex A C quadrato in C E plus duplo facto ex A C in C E quadratum ad cubum ex A C plus triplo facto ex A C quadrato in C E plus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E; & factum sub extremis superabit factum sub medijs. Igitur quadrato quadratum ex A C plus quadruplo facto ex A C cubo in C E plus sextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratum plus quadruplo facto ex C E cubo in A C plus quadrato quadrato ex C E superabit quadrato quadratum ex A C plus quadruplo facto ex A C cubo in C E plus duplici facto ex A C in C E cubum, quod cum per se pateat, ideò sit.

Synthesis secundæ partis.

QVia quadrato quadratum ex A C plus quadruplo facto ex A C cubo in C E plus sextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratum plus quadruplo facto ex C E cubo in A C plus quadrato quadrato ex C E superat quadrato quadratum ex A C plus quadruplo facto ex A C cubo in C E plus duplici facto ex A C in C E cubum habebit factum ex A C plus C E ad A C maiorem rationem, quam cubus ex A C plus quadruplo facto ex A C quadrato in C E plus duplo facto ex A C in C E quadratum ad cubum ex A C plus triplo facto ex A C quadrato in C E plus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E; sed vt A C plus C E ad A C, ita E L ad C I; ergo E L ad C I habebit maiorem rationem, quã cubus ex A C plus quadruplo facto ex A C quadrato in C E plus duplo facto ex A C in C E quadratum ad cubum ex A C plus triplo facto ex A C quadrato in C E plus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; quare factum ex cubo A C in E L plus triplo facto ex A C quadrato in C E in E L plus triplo facto ex A C in C E quadratum in E L plus facto ex cubo ex C E in E L superabit factum ex cubo A C in C I plus quadruplo facto ex A C quadrato



in

in C E in C I plus duplo facto ex A C in C E quadratum in C I. Vtriq; termino addatur cubus ex A C in C I, & fiat Antithesis, erit factum ex cubo A C in C I maius duplici facto ex cubo A C in C I plus quadruplo facto ex A C quadrato in C E in C I plus duplo facto ex A C in C E quadratum in C I minus facto ex cubo A C in E L minus triplo facto ex A C quadrato in C E in E L minus triplo facto ex A C in C E quadratum in E L minus facto ex cubo C E in E L, ideſt per interpretationem id, quod fit ex quadrato ex A C plus C E, ideſt A E, in duplicem A C, ideſt A B in C I, minus eo, quod fit ex cubo eiuſdem A C plus C E, ideſt A E in E L; Quare factum ex cubo A C in C I, ideſt, quia A C ſupponitur æqualis C B, factum ex quadrato A C in C I in C B ſuperabit factum ex quadrato A E in A B in C I minus facto ex cubo A E in E L; Quare factum ex C I in C B ad factum ex A B in C I minus A E in E L habebit maiorem rationem, quam quadratum ex A E ad quadratum ex A C; ſed, vt quadratum ex A E ad quadratum ex A C, ita E F ad C D, & factum ex A B in C I minus facto ex A E in E L eſt æquale facto ex E L in E Q; ergo factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q habet maiorem rationem, quam E F ad C D; quocirca factum ex C I in C B in C D ſuperabit factum ex E F in E L in E Q, quod erat demonſtrandum. Cum igitur tam plano planum, quod applicatur dimidio dati plani ſuperet, tam id, quod applicatur maiori parti, quam ſit dimidium, quam id quod applicatur minori cum defectu ſimili, ſimiliterq; poſito patet eſſe omnium maximum, quod ſumpſimus probandum.

SCHOLIVM.

VT hæc propositio exibeatur per lineas homologas data rationali in id recidet, vt reperiatur similis dato plano, quæ ita secetur, vt quod fit sub segmentis sit omnium maximum. Sed ad propositionem primam docuimus id esse, quando linea secatur bifariam; quocirca ne eadem frustra repetam eo remitto lectores, ibi enim demonstratur. Posita rationali, & linea, quæ secetur vtcunq; si fiat, vt rationalis ad alterum segmentum, ita alterum segmentum ad aliam, hanc fore omnium maximam, quando segmenta erunt æqualia; nam linea, quæ secatur in hac propositione est, ea, quæ facta est similis dato plano, & alterum ipsius segmentum referet partem dati plani in quadratum effecti, & vltima inuenta referet factum plano planum ex partibus plani in se ductis.

PROPOSITIO VI. ZETETICA.

Inuenire maximum plano planum, quod possit applicari dato solido cum defectu plano plani similis dato, & datum, cui debeat assimilari defectus sit quadrato quadratum,

SIT datum B solidum, cui sit applicandum plano planum deficiens quadrato quadrato, quod sit omnium maximum; Cum solidi segmentum, quod effingi debet in quadrato quadratum deficiens necesse sit, vt sit cubus. Sit igitur A, cui applicetur B solidum, ex quo si fiat cubus, erit reliquum B solidum minus cubo ex A, quod ductum

in A producet plano planum ex B ſolido in A minus quadrato quadrato ex A, quod erit plano planum applicatum cum defectu A quadrato quadrati.

Iterum loco ipſius A ſumatur A plus E, & E iuxta hanc methodum æquetur nihilo, erit plano planum applicatum deficiens quadrato quadrato plano planum ex B ſolido in A plus plano plano ex B ſolido in E minus quadrato quadrato ex A minus quadruplo plano plano ex A cubo in E minus ſextuplo plano plano ex A quadrato in E quadratum minus quadruplo plano plano ex A in E cubũ minus quadrato quadrato ex E; Vnde ſi dematur ſuperius factum, erit differentia plano planum ex B ſolido in E minus quadruplo plano plano ex A cubo in E minus ſextuplo plano plano ex A quadrato in E quadratum minus quadruplo plano plano ex A in E cubum minus quadrato quadrato ex E, quæ æquabitur nihilo; & facta Antitheſi, & omnibus applicatis ad E, erit B ſolidum æquale quadruplo A cubo plus ſextuplo ſolido ex A quadrato in E plus quadruplo ſolido ex A in E quadratum plus cubo ex E; & reiectis ijs, quæ ſub E; nam æquantur nihilo, erit B ſolidum æquale quadruplo A cubo, & quarta pars B ſolidi æquabitur cubo ex A, ex quo effingi debet quadrato quadratum; & plano planum deficiens quadrato quadrato applicabitur tribus ex quatuor partibus dati ſolidi. Hinc

PORISMA.

Maximum plano planum, quod applicatur dato ſolido deficiens quadrato quadrato eſt id, quod applicatur tribus ex quatuor partibus dati ſolidi, & quadrato quadratum, quod deficit occupat reliquam quartam partem.

THEO-

THEOREMA.

Omnium plano planorum ad idem ſolidum applicatorum, & deficientium plano planis ſimilibus, ſimiliterq; poſitis maximum eſt id, quod applicatur tribus partibus ex quatuor, in quas diuiſum ſupponitur ſolidum.

SIT datum ſolidum ex C I in A B in C D, cui fiat æquale ſolidum ex E L in E F in A Q; & A C ſit ſub tripla ipſius C B, erit ſolidum ex C I in C D in C B æquale tribus ex quatuor partibus dati ſolidi, & ſolidum ex E L in E F in E Q erit maius, quam ſint tres ex quatuor partibus dati ſolidi; & ſint ſolida ex A C in C I in C D, & ex A E in E L in E F inter ſe ſimilia; fiat autem, vt quadratum ex

A E ad quadratum ex A C, ita E F ad C G, erunt parallelepipeda ex A E in E L in E F, & ex A C in C I in C G plano plana ſimilia, ſimiliterq; poſita, & parallelepipeda ex C I in C B in C G, & ex E L in E F in E Q erunt plano plana eidem ſolido applicata deficientia plano planis ſimilibus, ſimiliterq; poſitis.

Dico primo parallelepipedum ex C I in C B in C G, quod

quod eſt applicatum tribus ex quatuor partibus dati ſolidi ſuperare parallelepipedum ex E L in E F in E Q, quod eſt applicatum parti maiori, quam ſint tres ex quatuor partibus dati ſolidi, cum ipſorum defectus ſint plano plana ſimilia, ſimiliterq; poſita.

Analyſis primæ partis.

QVia factum ex C I in C B in C G dicitur ſuperare factum ex E L in E F in E Q habebit factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q maiorem rationem, quam E F ad C G, hoc eſt, quam quadratum ex A E ad quadratum ex A C per conſtructionem; ſed quadratum ex A E ad quadratum ex A C habet eam rationem, quam habet quadratum ex E F ad quadratum ex C D, ſimiles enim ſunt A E, & A C duabus E F, & C D; ergo factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q habet maiorem rationem, quam quadratum ex E F ad quadratum ex C D, & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs; factum igitur ex C I in C B in C D quadratum ſuperabit factum ex E L in E Q in E F quadratum; ſed quia factum ex C I in C D in A B factum eſt æquale facto ex E L in E F in A Q, erit factum ex E L in E Q in E F æquale facto ex C I in C D in A B minus facto ex A E in E L in E F, & factum ex E L in E Q in E F quadratum erit æquale facto ex C I in C D in A B in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum. Quare factum ex C I in C B in C D quadratum ſuperabit factum ex C I in C D in A B in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum. Quia verò C B

per

per constructionem est æqualis triplici A C, & A B quadruplici, erit factum ex C I in triplam A C in C D quadratum maius facto ex C I in quadruplam A C in C D in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum; & factum ex C I in triplam A C in C D ad factum ex C I in quadruplam A C in C D minus facto ex A E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam E F ad C D, seù, quam A E ad A C, nam eadem est ratio per constructionem; Quare factum sub extremis superabit factum sub medijs. Igitur factum ex C I in triplum quadratum ex A C in C D superabit factum ex C I in quadruplam A C in C D in A E

G D F I L A E C B Q

minus facto ex A E quadrato in E L in E F; & per Antithesim factum ex A E quadrato in E L in E F superabit factum ex C I in quadruplam A C in C D in A E minus facto ex C I in triplum quadratum ex A C in C D; & ideò factum ex A E quadrato in E L ad factum ex C I in quadruplam A C in A E minus facto ex C I in triplum quadratum ex A C habebit maiorem rationem, quam C D ad E F, seù per constructionem, quam A C ad A E; & ideo factum ex A E cubo in E L superat factum ex C I in quadruplum A C quadratum in A E minus facto ex C I in triplum cubum ex A C;

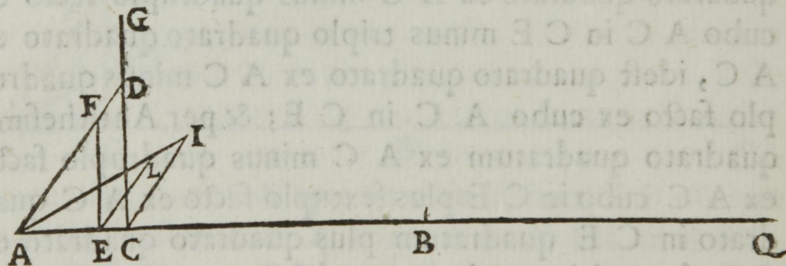
&

& cubus ex A E ad factum ex quadruplo quadrato A C in A E minus triplo cubo ex A C habebit maiorem rationem, quam C I ad E L, seù quam A C ad A E; & ideò quadrato quadratum ex A E superabit factum ex quadruplo cubo ex A C in A E minus triplo quadrato quadrato ex A C; quia autem A E est æqualis A C minus C E, fiat interpretatio, & erit quadrato quadratum ex A C minus C E, idest quadrato quadratum ex A C minus quadruplo facto ex A C cubo in C E plus sextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratum minus quadruplo facto ex A C in C E cubum plus quadrato quadrato ex C E maius facto ex quadruplo cubo ex A C in A E, idest interpretando A E in A C minus C E facto ex quadruplo quadrato quadrato ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E minus triplo quadrato quadrato ex A C, idest quadrato quadrato ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E; & per Antithesim quadrato quadratum ex A C minus quadruplo facto ex A C cubo in C E plus sextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratum plus quadrato quadrato ex C E superabit quadrato quadratum ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E plus quadruplo facto ex A C in C E cubum; & reiectis communibus scilicet quadrato quadrato ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E, erit sextuplum factum ex A C quadrato in C E quadratum vna cum quadrato quadrato ex C E maius quadruplo facto ex A C in C E cubum; & si omnia applicentur ad quadratum ex C E; erit sextuplum quadratum ex A C vna cum

quadrato ex C E maius quadruplo facto ex A C in C E, quod patet, nam A C supponitur superare C E.

Synthesis primæ partis.

QVia A C superat C E erit sextuplum quadratum ex A C vna cum quadrato ex C E maius quadruplo facto ex A C in C E; si omnia ducantur in C E quadratum, erit sextuplum factum ex A C quadrato in C E quadratum vna cum quadrato quadrato ex C E maius quadruplo facto ex A C in C E cubum; si vtrique parti addatur quadrato quadratum ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E; erit quadrato quadratum ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E vna cum sextuplo facto ex A C



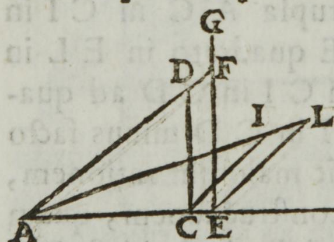
quadrato in C E quadratum vna cum quadrato quadrato ex C E maius quadrato quadrato ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E plus quadruplo facto ex A C in C E cubum; & per Antithesim erit quadrato quadratum ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E plus sextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratum minus quadruplo facto ex A C in C E cubum plus quadrato quadrato ex C E, idest per interpretationem quadrato quadratum ex A E,

(nam

(nam A E æquatur A C minus C E) maius quadrato quadrato ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E, ideſt per interpretationem quadruplo facto ex cubo A C in A E minus triplo quadrato quadrato ex A C. Quare cubus ex A E ad factum ex quadruplo quadrato ex A C in A E minus triplo cubo ex A C habebit maiorem rationem, quam A C ad A E, ideſt, quam C I ad E L; ideò factum ex cubo A E in E L ſuperabit factum ex quadruplo quadrato ex A C in A E in C I minus triplo facto ex cubo A C in C I, & factum ex A E quadrato in E L ad factum ex quadrupla A C in A E in C I minus facto ex triplo A C quadrato in C I habebit maiorem rationem, quam A C ad A E, ideſt, quam C D ad E F; & factum ex A E quadrato in E L in E F ſuperabit factum ex quadrupla A C in C I in A E in C D minus triplo facto ex quadrato A C in C I in C D; & per Antitheſim triplum factum ex quadrato A C in C I in C D ſuperabit factum ex quadrupla A C in C I in A E in C D minus facto ex A E quadrato in E L in E F, & factum ex tripla A C in C I in C D ad quadruplum factum ex A C in C I in C D minus facto ex A E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam A E ad A C, ſeù per conſtructionem, quam E F ad C D; ergo factum ex tripla A C, ideſt C B in C I in C D quadratum ſuperabit factum ex quadrupla A C, ideſt ex A B in C D in C I in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum; ſed A B in C D in C I minus facto ex A E in E L in E F eſt æquale facto ex E F in E L in E Q; ergo factum ex

C B in C I in C D quadratum ſuperabit factum ex E F quadrato in E L in E Q; & factum ex C B in C I ad factum ex E L in E Q habebit maiorem rationem, quam E F quadratum ad C D quadratum, ideſt quam E F ad C G; (nam per conſtructionem, vt quadratum ex A E ad quadratum ex A C, ita E F ad C G, & E F quadratum ad C D quadratum) Quamobrem factum ex C B in C I in C G ſuperabit factum ex E L in E Q in E F, quod ſumpſimus demonſtrandum; Quando applicatio fit parti maiori dati ſolidi, quam ſint tres partes ipſius ſolidi diuiſi in quatuor partes. Quare

Sit ſecundo datum ſolidum ex C I in A B in C D, cui fiat æquale ſolidum ex E L in E F in A Q, & A C ſit ſub tripla ipſius C B, erit ſolidum ex C I in C D in C B æquale tribus ex quatuor partibus dati ſolidi, & ſolidum ex E L in E F in E Q erit minus, quam ſint tres ex quatuor partibus dati ſolidi, & ſint ſolida ex A C in C I in C D, & ex A E in E L in E F inter ſe ſimilia; fiat



autem, vt quadratum ex A C ad quadratum ex A E, ita C D ad E G; erunt parallelepipeda ex A E in E L in E G, & ex A C in C I in C D plano plana ſimilia, ſimiliterq; poſita, & parallelepipeda ex C I in C B in C D, & ex E L in E G in E Q erunt plano plana eidem ſolido applicata deficientia plano planis

ſimi-

ſimilibus, ſimiliterque poſitis.

Dico ſecundo parallelepipedum ex C I in C B in C D, quod eſt applicatum tribus ex quatuor partibus dati ſolidi ſuperare parallelepipedum ex E L in E G in E Q, quod eſt applicatum parti minori, quam ſint tres ex quatuor partibus dati ſolidi, cum ipſorum defectus ſint plano plana ſimilia, ſimiliterq; poſita.

Analyſis ſecundæ partis.

QVia factum ex C I in C B in C D dicitur ſuperare factum ex E L in E Q in E G, habebit factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q maiorem rationem, quam E G ad C D; hoc eſt quam quadratum ex A E ad quadratum ex A C per conſtructionem; ſed quadratum ex A E ad quadratum ex A C habet eam rationem, quam habet quadratum ex E F ad quadratum ex C D; ſimiles enim ſunt A E, & A C duabus E F, & C D; ergo factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q habet maiorem rationem, quam quadratum ex E F ad quadratum ex C D, & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs; factum igitur ex C I in C B in C D quadratum ſuperabit factum ex E L in E Q in E F quadratum: ſed quia factum ex C I in C D in A B factum eſt æquale facto ex E L in E F in A Q, erit factum ex E L in E Q in E F æquale facto ex C I in C D in A B minus facto ex A E in E L in E F, & factum ex E L in E Q in E F quadratum erit æquale facto ex C I in C D in A B in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum. Quare factum ex C I in C B in C D qua-

dratum

dratum ſuperabit factum ex C I in C D in A B in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum. Quia vero C B per conſtructionem eſt æqualis triplici A C, & A B quadruplici; erit factum ex C I in triplam A C in C D quadratum maius facto ex C I in quadruplam A C in C D in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum; & factum ex C I in triplam A C in C D ad factum ex C I in quadruplam A C in C D minus facto ex A E in E L in E F habebit maiorem rationem quam E F ad C D, ſeù quam A E ad A C; nam eadem eſt ratio, per conſtructionem; Quare factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs; igitur factum ex C I in triplum quadratū ex A C in C D ſuperabit factum ex C I in quadruplam A C in C D in A E minus facto ex A E quadrato in E L in E F; & per Antitheſim factum ex A E quadrato in E L in E F ſuperabit factum ex C I in quadruplam A C in C D in A E minus facto ex C I in triplum quadratum ex A C in C D; & ideò factum ex A E quadrato in E L ad factum ex C I in quadruplam A C in A E minus facto ex C I in triplum quadratum ex A C habebit maiorem rationem, quam C D ad E F, ſeu per conſtructionem, quam A C ad A E; & ideò factum ex A E cubo in E L ſuperat factum ex C I in quadruplum A C quadratum in A E minus facto ex C I in triplum

cubum

cubum ex A C; & cubus ex A E ad factum ex quadruplo quadrato ex A C in A E minus triplo cubo ex A C habebit maiorem rationem, quam C I ad E L, seù quam A C ad A E; & ideò quadrato quadratum ex A E superabit factum ex quadruplo cubo ex A C in A E minus triplo quadrato quadrato ex A C. Quia autem A E est æqualis A C plus C E, fiat interpretatio, & erit quadrato quadratum ex A C plus C E, idest quadrato quadratum ex A C plus quadruplo facto ex cubo A C in C E plus sextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratum plus quadruplo facto ex A C in C E cubum plus quadrato quadrato ex C E maius facto ex quadruplo cubo ex A C in A E minus triplo quadrato quadrato ex A C, idest interpretando A E in A C plus C E facto ex quadruplo quadrato quadrato ex A C plus quadruplo facto ex cubo A C in C E minus triplo quadrato quadrato ex A C, idest quadrato quadrato ex A C plus quadruplo facto ex cubo A C in C E, quod patet. Hinc

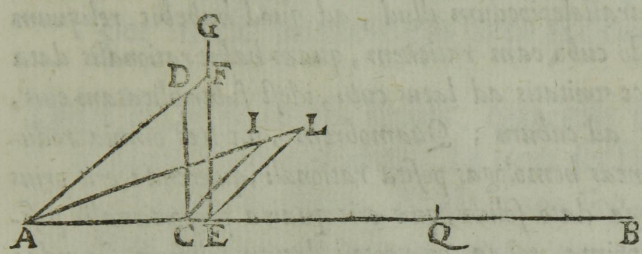
Synthesis secundæ partis.

Quia quadrato quadratum ex A C plus quadruplo facto ex cubo A C in C E plus sextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratum plus quadruplo facto ex A C in C E cubum plus quadrato quadrato ex C E superat quadrato quadratum ex A C plus quadruplo facto ex cubo A C in C E, idest (interpretando A C plus C E in A E) quadrato quadratum ex A E superat quadruplum factum ex cubo A C in A E minus triplo quadrato quadrato ex A C, habebit

bebit cubus ex A E ad factum ex quadruplo quadrato A C in A E minus triplo cubo ex A C maiorem rationem, quam A C ad A E, ideſt, quam C I ad E L; Ergo factum ex cubo A E in E L ſuperabit quadruplum factum ex quadrato A C in A E in C I minus facto ex triplo cubo ex A C in C I; & factum ex quadrato A E in E L ad factum ex quadrupla A C in A E in C I minus facto ex triplo quadrato A C in C I habebit maiorem rationem, quam A C ad A E, ſeu per conſtructionem C D ad E F. Quamobrem factum ex A E quadrato in E L in E F ſuperabit factum ex quadrupla A C in A E in C I in C D minus facto ex triplo quadrato ex A C in C I in C D; & per Antitheſim factum ex triplo quadrato A C in C I in C D ſuperabit factum ex quadrupla A C in A E in C I in C D minus facto ex A E quadrato in E L in E F; & factum ex tripla A C in C I in C D ad factum ex quadrupla A C in C I in C D minus facto ex A E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam A E ad A C, ſeu E F ad C D; factum igitur ex tripla A C in C I in C D quadratum ſuperat factum ex quadrupla A C in C I in C D in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum; & quia tripla A C, per conſtructionem eſt æqualis C B, & quadrupla A C ipſi A B, erit factum ex C B in C I in C D quadratum maius facto, ex A B in C I in C D in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum. Quia autem factum ex A B in C I in C D eſt æquale facto ex A Q in E L in E F, erit factum ex A B in C I in C D minus facto ex A E in E L in E F æquale facto

ex

ex E L in E F in E Q; ideò erit factum ex C B in C I in C D quadratum maius facto ex E L in E Q in E F quadratum, & factum ex C B in C I ad factum ex E L in E Q habebit maiorem rationem, quam E F quadratum ad C D quadratum; sed, vt E F quadratum ad C D quadratum, ita quadratum ex A E ad quadratum ex A C ob similitudinem linearum; & vt quadratum ex A E ad quadratum ex A C, ita est E G ad C D, per constructionẽ, habebit factum ex C B in C I ad factum ex E L in E Q maiorem rationem, quam E G ad C D; & ideò factum ex C B in C I in C D superabit factum ex E L in E G in E Q, quod erat probandum; Cum igitur plano planum, quod applicatur tribus ex quatuor partibus dati solidi superet plano planum, quod applicatur parti, tam maiori, quam minori, ea, quæ æquet tres ex quatuor partibus dati solidi, cum defectu simili, erit maximum omnium, quæ applicari possint dato solido, quod sumpsimus demonstrandum.



SCHOLIVM.

Quia tunc applicatur plano planum dato solido deficiens quadrato quadrato, quando datum solidum, ita secatur, vt si ex altero ipsius segmento efficiatur cubus, & reliquum solidi applicetur quadrato huius effecti cubi, tum exibea-

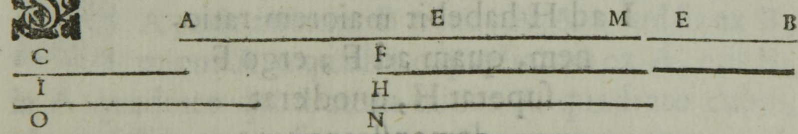
tur quædam altitudo, quæ ad altitudinem cubi habeat eam rationem, quam habet latus cubi ad rationalem datam, & cum hac altitudine, manente eadem basi cubi, fiat parallelepipedum, hoc per ea, quæ in Isagoge docuimus, erit quadrato quadratum, cuius quadrato quadrati altitudine seruata, si terminetur reliquum applicati solidi, exurgens parallelepipedum erit plano planum applicatum deficiens quadrato quadrato; Hoc igitur plano planum applicatum deficiens quadrato quadrato erit parallelepipedum illud, ad quod habebit reliquum solidi detracto cubo eam rationem, quam habet rationalis data se gerens vice vnitatis ad latus cubi, idest subtriplicatam eius, quam habet ad cubum; Quamobrem, vt hæc omnia reducantur ad lineas homologas posita rationali, quærenda erit prius linea homologa dato solido, quæ erit quarta proportionalis posita rationali prima, & ea, quæ potest datum solidum secunda; tum etiam inuenienda est similis cubo dati segmenti, quæ erit quarta proportionalis, posita rationali prima, & ea, quæ potest datum segmentum secunda, quæ si subtrahatur à simili dato solido, cum sit ipsa minor; nam assimilatur parti, reliquum erit simile reliquo dati solidi, cui si constituatur consequens in ea ratione, quam habet rationalis ad similem lateri resecti cubi, hæc consequens erit similis plano plano applicato dato solido, cum defectu quadrato quadrati; & hanc demonstrabimus esse omnium maximam, quando similis cubo erit tertia pars similis reliquo segmento; hoc est, quando, si tota linea similis dato solido secetur in quatuor partes, quarta pars assimiletur cubo, & fiat, vt rationalis ad latus cubi, ita similis reliquo solidi ad aliam, seu, quod idem est tres ex quatuor partibus similis dato solido habeant ad aliam rationem subtriplicatam eius, quam habet rationalis ad reliquam quartam partem.

partem. Fateor autem in hac propositione, si construenda essent omnia, quæ adduximus recedendum esse ab Euclideis postulatis; nam inter duas datas essent inueniendæ duæ mediæ proportionales; attamen cum ad demonstrandum sufficiat factum supponere, ab æquis Lectoribus hoc mihi concedi postulans me transferam ad propositionem.

Eadem propositio demonstrata, & proposita per lineas homologas data rationali.

Datis duabus rectis lineis, quarum altera se habens loco rationalis sit non secta; altera verò secta vtcunq;, & alterum segmentum sectæ habeat ad aliam rationem subtriplicatam eius, quam habet rationalis ad alterum segmentum. Dico hanc fore omnium maximam, quando segmentum illud fuerit alterius triplum.

SIT data rationalis C, & altera B A, quæ secetur



primo in M, ita, vt M A sit tripla ipsius B M; secundo, vtcunq; in E; ita, vt B E sit maior, aut minor quam B M; & I sit prima duarum medio loco proportionalium inter C, & B M, & O similiter inter C, & B E; & fiat vt C ad I, ita M A ad F, &, vt C

ad O, ita E A ad H. Dico F superare H.

Cum ab eadem C supponantur duæ series quatuor continuè proportionalium, quarum vna desinit in B M, & altera in B E, & primæ seriei secunda est I, & alterius seriei secunda est O; habebit B M ad B E rationem triplicatam eius, quam habet I ad O, per lemma secundum; si igitur inter B M, & B E intelligantur duæ mediæ proportionales, quarum prima sit G, habebit B M ad G eam rationem, quam habet I ad O; & erit ratio B M ad G subtriplicata rationis B M ad B E; Quare per lemma decimum habebit B M ad G maiorem rationem, quam A E ad A M; tum sic.

Fiat vt O ad H, ita I ad N; & considerentur tres quantitates I, O, H, & aliæ tres I, N, F; Quia, vt C ad M A, ita I ad F, &, vt O ad H, ita C ad E A, erit ratio I ad F minus ratione O ad H, æqualis rationi E A ad A M; sed vti O ad H, ita facta est I ad N; ergo ratio N ad F erit æqualis rationi E A ad M A; ergo I ad O habebit maiorem rationem quam N ad F; sed vt O ad H, ita I ad N; ergo, per rationem perturbatam, I ad H habebit maiorem rationem, quam ad F; ergo F superat H, quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO VII. ZETETICA.

Inuenire maximum plano ſolidum, quod fiat ſub ſegmento datæ rectæ lineæ, & quadrato quadrato alterius ſegmenti, quod idem eſt, ac inuenire maximum plano ſolidum, quod applicari poſſit datæ lineæ deficiens quadrato cubo.

SCHOLIVM.

HIC aduertendum eſt quadrato cubum, iuxta Methodum Diophanteam, quam ego ſequor, eſſe eam magnitudinem, quæ iuxta alteram methodum dicitur primum Surdeſolidum, aut Relatum; quod volui monuiſſe, ne, ſit inanibus quæſtionibus nominis locus; licet ſatis, ſuperq; fuiſſet me quadrato cubum non quadrati cubum dixiſſe, cum hac dicendi formula exprìmatur id, quod producitur ex quadrato in cubum, non autem productum ex quadrato cubicè ducto.

SIT data recta B, cuius alterum ſegmentum ſit A, erit alterum B minus A, & quod fit ex B, minus A in quadrato quadratum ex A, erit B, in A quadrato quadratum minus A quadrato cubo, plano ſolidum quæſitum.

Sit iterum alterum ipſius ſegmentum A plus E erit alterum B minus A minus E, fiat ex A plus E quadrato quadratum, erit quadrato quadratum ex A plus quadruplo plano plano ex A cubo in E plus ſextuplo plano plano ex E quadrato in A quadratum plus qua-

druplo

druplo plano plano ex A in E cubum plus quadrato quadrato ex E, quod ductum in B minus A minus E, producet plano solidum ex B in A quadrato quadratum plus quadruplo plano solido ex B in A cubum in E plus sextuplo plano solido ex B in E quadratum in A quadratum plus quadruplo plano solido ex B in A in E cubum plus plano solido ex B in E quadrato quadratum minus quadrato cubo ex A minus quintuplo plano solido ex A quadrato quadrato in E minus decuplo plano solido ex E quadrato in A cubum minus decuplo plano solido ex A quadrato in E cubum minus quintuplo plano solido ex A in E quadrato quadratum minus E quadrato cubo : Vnde si dematur superius factum B in A quadrato quadratum minus A quadrato cubo, erit residuum quadruplum plano solidum ex B in A cubum in E plus sextuplo plano solido ex B in E quadratum in A quadratum plus quadruplo plano solido ex B in A in E cubum plus plano solido ex B in E quadrato quadratum minus quintuplo plano solido ex A quadrato quadrato in E minus decuplo plano solido ex E quadrato in A cubum minus decuplo plano solido ex A quadrato in E cubum minus quintuplo plano solido ex A in E quadrato quadratum minus E quadrato cubo . Omnia applicentur ad E, & seruatis tantum ijs, quæ ab E liberentur, cum reliqua supponantur æqualia nihilo, & fiat Antithesis, erit quadruplum factum ex B in A cubum æquale quintuplo A quadrato quadrato ; & si omnia applicentur ad A cubum, erit quadruplum B æquale quintuplo A, & quatuor ex quinque partibus ipsius B erunt æquales

ipsi

ipſi A; cum autem A ſit ſegmentum, vnde effingi debeat quadrato cubus defecturus, erit maximum plano ſolidum, quod applicatur ipſi B deficiens quadrato cubo, id quod applicatur quintæ parti ipſius B. Hinc

PORISMA.

Maximum plano ſolidum, quod applicatur datæ lineæ deficiens quadrato cubo eſt id, quod applicatur quintæ parti datæ lineæ, & quadrato cubus, qui deficit occupat reliquas quatuor ex quinque partibus datæ lineæ:

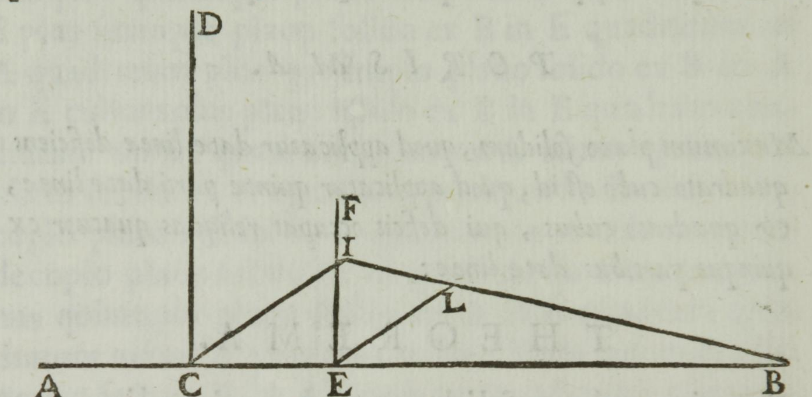
THEOREMA.

Omnium plano ſolidorum ad eandem lineam applicatorum, & deficientium plano ſolidis ſimilibus, ſimiliterq; poſitis maximum eſt id, quod quintæ parti datæ lineæ applicatur.

SIT data recta A B, cuius quinta pars ſit A C, & A E primo ſuperet A C, & parallelogrammum ex B C in C I ſit ſimile parallelogrammo ex B E in E L. Fiat autem, vt cubus ex B C ad cubum ex B E, ita C D ad E F; erunt per definitionem ſecundam facta ex B C in C I in C D, & ex B E in E F in E L duo plano ſolida ſimilia, cum ſint parallelepipeda ſuper ſimilibus baſibus conſtituta, quorum altitudines ſunt in triplicata ratione laterum homologorum ſimilium baſium; Quocirca facta parallelepipeda ex A C in C I in C D, & ex A E in E L in E F

erunt

erunt plano solida eidem lineæ A B applicata deficientia plano solidis similibus, similiterq; positis, quorum factum ex A C in C I in C D applicatum est quintæ parti datæ lineæ; alterum verò scilicet factum ex A E



in E F in E L applicatum est parti maiori, quam sit quinta pars datæ lineæ. Quare dico primo factum ex A C in C I in C D superare factum ex A E in E F in E L.

Analysis primæ partis.

QVia parallelepipedum ex A C in C I in C D supponitur superare parallelepipedum ex A E in E L in E F, habebit factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L maiorem rationem, quam E F ad C D, seù per constructionem, quam cubus ex B E, seù ex quadrupla A C minus C E ad cubum ex B C, seù quadrupla A C; Quare factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam sexaginta quatuor cubi ex A C minus quadraginta, & octo solidis ex A C quadrato in C E plus duodecim solidis ex C E quadrato in A C minus cubo ex C E

ad

ad ſexaginta quatuor cubos ex A C ; & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs ; ergo factum ex ſexaginta quatuor quadrato quadratis ex A C in C I ſuperabit factum ex ſexaginta quatuor cubis ex A C in A E in E L minus facto ex quadraginta octo quadratis ex A C in C E in A E in E L plus facto ex duodecim quadratis ex C E in A C in A E in E L minus facto ex cubo C E in A E in E L ; Ideò ſexaginta quatuor quadrato quadrata ex A C ad factum ex ſexaginta quatuor cubis ex A C in A E minus facto ex quadraginta , & octo quadratis ex A C in C E in A E plus facto ex duodecim quadratis ex C E in A C in A E minus facto ex C E cubo in A E habebit maiorem rationem, quam E L ad C I, ideſt B E ad B C, ideſt quadrupla A C minus C E ad quadruplam A C, & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs ; ergo ducenti quinquaginta ſex quadrato cubi ex A C ſuperabunt factum, ex ducentis quinquaginta ſex quadrato quadratis ex A C in A E minus facto ex ducentis quinquaginta ſex cubis ex A C in C E in A E plus facto ex nonaginta ſex quadratis ex A C in C E quadratum in A E minus facto ex ſexdecim cubis ex C E in A C in A E plus quadrato quadrato ex C E in A E ; ideſt quia A E eſt æqualis A C plus C E, facta interpretatione , ducenti quinquaginta ſex quadrato cubi ex A C ſuperabunt ducentos quinquaginta ſex quadrato cubos ex A C minus facto ex centum ſexaginta cubis ex A C in C E quadratum plus facto ex octoginta cubis ex C E in A C quadratum minus facto ex quindecim quadrato quadratis ex C E in A C

plus quadrato cubo ex C E; & si fiat Antithesis, & reiciantur communia, factum ex centum sexaginta cubis ex A C in C E quadratum plus facto ex quindecim quadrato quadratis ex C E in A C superabit factum ex octoginta cubis ex C E in A C quadratum plus quadrato cubo ex C E; & si omnia applicentur ad quadratum ex C E, centum sexaginta cubi ex A C vna cum facto ex quindecim quadratis ex C E in A C superabunt factum ex octoginta quadratis ex A C in C E plus cubo ex C E, quod patebit ex sequenti lemmate.

LEMMA.

Datis duabus lineis; ita tamen, vt altera deficiat à quadrupla alterius. Dico centum sexaginta cubos vnius vna cum facto ex eadem in quindecim quadrata alterius superare factum ex octoginta quadratis eiusdem in alteram plus alterius cubo.



Sint duæ lineæ C, & E, & quadrupla C superet E. C

Dico E

centum sexaginta cubos ex C, vna cum facto ex C in quindecim quadrata ex E superare factum ex octoginta quadratis ex C in E, plus cubo ex E.

Plures casus habet hæc propositio; aut enim C superat E; aut est ipsi æqualis; aut E superat C, & dupla C superat E; aut dupla C est æqualis E; aut E superat duplam C, & tripla C superat E; aut tripla C

est

est æqualis E; aut E superat triplam C, & quatuor C superant E, in omnibus hisce casibus examinanda erit propositio.

Sit primo C maior, quam E, factum ex octoginta quadratis ex C in E, vna cum cubo ex E deficiet ab octoginta, & vno cubo ex C; ergo multo magis à centum sexaginta, vna cum facto ex C in quindecim quadrata ex E.

Sit secundo C æqualis E, factũ ex octoginta quadratis ex C in E, vna cum cubo ex E æquabitur octoginta, & vni cubo ex C; ergo deficiet à centum sexaginta cubis ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C.

Sit tertio E maior quam C, sed duplex C superet E, factum ex octoginta quadratis ex C in E, vna cum cubo ex E deficiet à centum sexaginta cubis ex C, vna cum duplici facto ex C in E quadratum; ergo multo magis à centum sexaginta cubis ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C.

Sit quarto E æqualis duplici C, erit quadratum ex E æquale quadruplo quadrato ex C, & factum ex quindecim quadratis ex E in C æquabitur sexaginta cubis ex C; ergo centum sexaginta cubi ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C æquabunt ducentos viginti cubos ex C; factum verò ex octoginta quadratis ex C in E vna cum E cubo, æquabitur centum sexaginta, & octo cubis ex C; cum autem ducenti viginti cubi ex C superent centum sexaginta, & octo, patet propositio.

Sit quinto E maior duplici C; sed triplex C superet E; ponatur E æqualis duplici C plus A, & C superet

peret A, centum ſexaginta cubi ex C plus facto ex quindecim quadratis ex E in C æquabunt ducentos viginti cubos ex C plus facto ex ſexaginta quadratis ex C in A plus facto ex quindecim quadratis ex A in C; factum verò ex octoginta quadratis ex C in E vna cum cubo ex E æquabit centum ſexaginta, & octo cubos ex C plus facto ex nonaginta duobus quadratis ex C in A plus ſextuplo facto ex C in A quadratum plus A cubo. Dico ducentos viginti cubos ex C plus facto ex ſexaginta quadratis ex C in A plus facto ex quindecim quadratis ex A in C ſuperare centum ſexaginta, & octo cubos ex C plus facto ex nonaginta duobus quadratis ex C in A plus ſextuplo facto ex C in A quadratum plus A cubo; nam ſubductis communibus quinquaginta duo cubi ex C plus noncuplo facto ex A quadrato in C ſuperabunt factum ex triginta duobus quadratis ex C in A plus A cubo, quod patet, quia C ſuperat A.

Sit ſexto E æqualis triplici C, centum ſexaginta cubi ex C vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C æquabunt ducentos nonaginta quinque cubos ex C; & factum ex octoginta quadratis ex C in E, vna cum cubo ex E æquabit ducentos ſexaginta ſeptem cubos ex C, & cum ducenti nonaginta quinque ſuperent ducentos ſexaginta ſeptem, patet concluſio.

Sit ſeptimo E maior tripla C, ſed minor quadrupla, ideſt ſit æqualis triplici C plus A, & C ſuperet A; centum ſexaginta cubi ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C æquabunt ducentos nonaginta quinque cubos ex C plus facto ex nonaginta quadratis

dratis ex C in A plus facto ex quindecim quadratis ex A in C; factum verò ex octoginta quadratis ex C in E plus E cubo æquatur ducentis sexaginta septem cubis ex C plus facto ex centum septem quadratis ex C in A plus facto ex noncuplo A quadrato in C plus A cubo; & ducenti nonaginta quinque cubi ex C plus facto ex nonaginta quadratis ex C in A plus facto ex quindecim quadratis ex A in C superant ducentos sexaginta septem cubos ex C plus facto ex centum septem quadratis ex C in A plus facto ex noncuplo A quadrato in C plus cubo ex A; nam reiectis communibus, viginti, & octo cubi ex C plus facto ex sextuplo A quadrato in C superant factum ex decem & septem quadratis ex C in A plus A cubo, quod patet, nam C superat A. Quare sit

Synthesis primæ partis.

QVia C E deficit à quadrupla A C, per superius lemma, centum sexaginta cubi ex A C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex C E in A C superabunt factum ex octoginta quadratis ex A C in C E, plus cubo ex C E; & si omnia ducantur in quadratum ex C E, factum ex centum sexaginta cubis ex A C in C E quadratum vna cum facto ex quindecim quadrato quadratis ex C E in A C superabit factum ex octoginta quadratis ex A C in C E cubum plus quadrato cubo ex C E; si vtriq; parti addantur ducenti quinquaginta sex quadrato cubi ex A C, & fiat Antithesis, ducenti quinquaginta sex quadrato cubi ex A C superabunt ducentos quinquaginta sex quadrato cubos ex

ex A C minus facto ex centum sexaginta cubis ex A C in C E quadratum plus facto ex octoginta quadratis ex A C in C E cubum minus facto ex quindecim quadrato quadratis ex C E in A C plus quadrato cubo ex C E, & si fiat interpretatio A C plus C E in A E, cui æquatur; ducenti quinquaginta sex quadrato cubi ex A C superabunt factum ex ducentis quinquaginta sex quadrato quadratis ex A C in A E minus facto ex ducentis quinquaginta sex cubis ex A C in C E in A E plus facto ex nonaginta sex quadratis ex A C in

C E quadratum in A E minus facto ex sexdecim cubis ex C E in A C in A E plus quadrato quadrato ex C E in A E; ideò sexaginta quatuor quadrato quadrata ex A C ad factum ex sexaginta quatuor cubis ex A C in A E minus facto ex quadraginta, & octo quadratis ex A C in C E in A E plus facto ex duodecim quadratis ex C E in A C in A E minus facto ex C E cubo in A E habebit maiorem rationem, quam quadrupla A C minus C E ad quadruplam A C, idest, quam B E ad B C, idest, quam E L ad C I, & factum

sub

ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs ; ergo factum ex ſexaginta quatuor quadrato quadratis ex A C in C I ſuperabit factum ex ſexaginta quatuor cubis ex A C in A E in E L minus facto ex quadraginta octo quadratis ex A C in C E in A E in E L plus facto ex duodecim quadratis ex C E in A C in A E in E L minus facto ex cubo C E in A E in E L . Quare factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam ſexaginta quatuor cubi ex A C minus quadraginta , & octo ſolidis ex A C quadrato in C E plus duodecim ſolidis ex C E quadrato in A C minus cubo ex C E ad ſexaginta quatuor cubos ex A C , ideſt , quam cubus ex quadrupla A C minus C E, ideſt B E ad cubum ex quadrupla A C , ideſt B C; ſed vt cubus ex B E ad cubum ex B C, ita E F ad C D per conſtructionem ; ergo factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam E F ad C D , & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs : factum igitur ex A C in C I in C D ſuperabit factum ex A E in E L in E F , quod erat primo loco demonſtrandum ; Quando applicatio ſit parti maiori , quam ſit quinta pars datæ lineæ .

Sit ſecundo A C maior , quam A E , & planum ex B E in E L ſit ſimile plano ex B C in C I ; C D verò ad E F ſit , vt cubus ex B C ad cubum ex B E ; erunt parallelepipeda ex B C in C I in C D , & ex B E in E L in E F plano ſolida ſimilia ; Quare parallelepipeda ex A E in E L

in

in E F, & ex A C in C D in C I erunt plano solida applicata datæ lineæ deficientia plano solidis similibus, similiterq; positis; Quia verò plano solidum ex A C in C I in C D est applicatum quintæ parti datæ lineæ, & plano solidum ex A E in E L in E F est applicatum parti minori, quam sit quinta pars datæ lineæ.

Dico secundo factum ex A C in C I in C D superare factum ex A E in E L in E F.

Analysis secundæ partis.

QVia factum ex A C in C I in C D supponitur superare factum ex A E in E L in E F habebit factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L maiorem rationem, quam E F ad C D, seu per constructionem, quam cubus ex B E, seù ex quadrupla A C plus C E ad cubum ex B C, seù quadrupla A C. Quare factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam sexaginta quatuor cubi ex A C plus quadraginta, & octo solidis ex A C quadrato in C E plus duodecim solidis ex C E quadrato in A C plus cubo ex C E ad sexaginta quatuor cubos ex A C; & factum sub extremis superabit factum

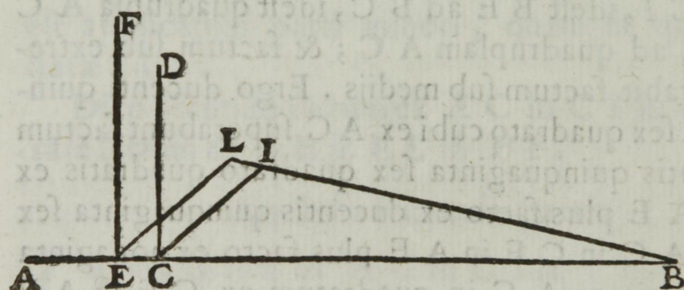
sub

ſub medijs ; Ergo factum ex ſexaginta quatuor quadrato quadratis ex A C in C I ſuperabit factum ex ſexaginta quatuor cubis ex A C in A E in E L plus facto ex quadraginta , & octo quadratis ex A C in C E in A E in E L plus facto ex duodecim quadratis ex C E in A C in A E in E L plus facto ex cubo C E in A E in E L ; Ideò ſexaginta quatuor quadrato quadrata ex A C ad factum ex ſexaginta quatuor cubis ex A C in A E plus facto ex quadraginta , & octo quadratis ex A C in C E in A E plus facto ex duodecim quadratis ex C E in A C in A E plus facto ex cubo C E in A E habebit maiorem rationem , quam E L ad C I , ideſt B E ad B C , ideſt quadrupla A C plus C E ad quadruplam A C ; & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs . Ergo ducenti quinquaginta ſex quadrato cubi ex A C ſuperabunt factum ex ducentis quinquaginta ſex quadrato quadratis ex A C in A E plus facto ex ducentis quinquaginta ſex cubis ex A C in C E in A E plus facto ex nonaginta ſex quadratis ex A C in quadratum ex C E in A E plus facto ex ſexdecim cubis ex C E in A C in A E plus facto ex quadrato quadrato ex C E in A E ; ideſt , quia A E eſt æqualis A C minus C E , facta interpretatione , ducenti quinquaginta ſex quadrato cubi ex A C ſuperabunt ducentos quinquaginta ſex quadrato cubos ex A C minus facto ex centum ſexaginta cubis ex A C in C E quadratum minus facto ex octoginta cubis ex C E in A C quadratum minus facto ex quindecim quadrato quadratis ex C E in A C minus quadrato cubo ex C E , quod patet : Quare ſit

R Syn-

Synthesis secundæ partis.

QVia AE est æqualis AC minus C E erit factum ex ducentis quinquaginta sex quadrato quadratis ex A C in A E plus facto ex ducentis quinquaginta sex cubis ex A C in C E in A E plus facto ex nonaginta sex quadratis ex A C in quadratum ex C E in A E plus facto ex sexdecim cubis ex C E in A C in A E plus facto ex quadrato quadrato ex C E in A E æquale ducentis quinquaginta sex quadrato cubis ex A C minus facto ex centum sexaginta cubis ex A C in C E quadratum minus facto ex octoginta cubis ex C E in A C quadratum minus facto ex quindecim quadrato quadratis ex C E in A C minus quadrato cubo ex C E. Quare ducenti quinquaginta sex quadrato cubi ex A C superabunt factum ex ducentis quinquaginta sex quadrato quadratis ex A C in A E plus facto ex ducentis quinquaginta sex cubis ex A C in C E in A E plus facto ex nonaginta sex quadratis ex A C in quadratum ex C E in A E plus facto ex sexdecim cubis ex C E in A C in A E plus facto ex quadrato quadrato ex C E in A E; & resoluendo habebunt sexaginta quatuor quadrato quadrata ex A C ad factũ



ex ſexaginta quatuor cubis ex A C in A E plus facto ex quadraginta, & octo quadratis ex A C in C E in A E plus facto ex duodecim quadratis ex C E in A C in A E plus facto ex cubo C E in A E maiorem rationem, quam quadrupla A C plus C E ad quadruplam A C; ideſt, quam B E ad B C, ideſt, quam E L ad C I, & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs. Ergo factum ex ſexaginta quatuor quadrato quadratis ex A C in C I ſuperabit factum ex ſexaginta quatuor cubis ex A C in A E in E L plus facto ex quadraginta, & octo quadratis ex A C in C E in A E in E L plus facto ex duodecim quadratis ex C E in A C in A E in E L plus facto ex cubo C E in A E in E L. Quare factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam ſexaginta quatuor cubi ex A C plus quadraginta, & octo ſolidis ex A C quadrato in C E plus duodecim ſolidis ex C E quadrato in A C plus cubo ex C E ad ſexaginta quatuor cubos ex A C; ideſt, per interpretationem, quam cubus ex quadrupla A C plus C E, ideſt ex B E ad cubum ex quadrupla A C, ideſt B C; ſed, vt cubus ex B E ad cubum ex B C, ita eſt, per conſtructionem, E F ad C D; Ergo factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam E F ad C D, & conſequenter factum ex A C in C I in C D ſuperabit factum ex A E in E L in E F; ergo plano ſolidum, quod applicatur quintæ parti datæ lineæ ſuperat plano ſolidum, quod applicatur parti minori, quam ſit quinta pars, quod erat ſecundo loco demonſtrandum: Cum autem

demonstrauerimus etiam superare id, quod applicatur parti maiori patet esse omnium maximum eorum, quæ applicari possint cum defectu simili, similiterq; posito, quod sumpsimus demonstrandum.

SCHOLIVM.

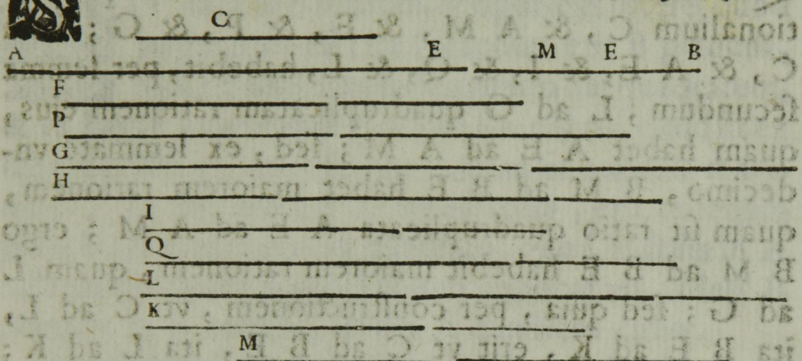
SI ponatur linea rationalis, & huius ratio ad aliam lineam datam continuetur in quatuor alijs continue proportionalibus vltrà rationalem, erit vltima similis quadrato quadrato datæ lineæ; & si hæc ducatur in aliam lineam quamcunque datam producetur simile plano solido: Cum autem similis huic producto sit proportionalis illa, ad quam hæc vltimo loco data habeat eam rationem, quam habet rationalis ad vltimam continuè proportionalium, hoc est quadruplicatam eius, quam habet ad primo datam lineam, vt apparet ex ijs, quæ in Isagoge docuimus; Hinc fit, vt eadem superior propositio per lineas homologas data rationali aptè demonstretur sequenti propositione.

Eadem propositio proposita, & demonstrata per lineas homologas data rationali.

Datis duabus rectis lineis, quarum altera non secta se habeat loco rationalis; altera verò secta sit, vtcunque, & alterum ipsius segmentum habeat ad aliam lineam rationem quadruplicatam eius, quam habet non secta ad alterum segmentum. Dico hanc fore omnium maximam, quando segmen-

tum, ad quod refertur non secta erit æquale quatuor ex quinque partibus datæ rectæ sectæ, vel fuerit quadruplum alterius segmenti.

SIT data rationalis C, & altera A B, quæ prius



secetur in M, ita, vt A M sit quadrupla ipsius B M; secundo vtcunque in E; ita vt B E sit maior, aut minor, quam B M; & fiat, vt C ad A M, ita A M ad F, & F ad P, & P ad G, habebit C ad G quadruplicatam rationem eius, quam habet ad A M; fiat iterum, vt C ad A E, ita A E ad I, & I ad Q, & Q ad L, habebit C ad L quadruplicatam rationem eius, quam habet ad A E; tum fiat, vt C ad G, ita B M ad H, &, vt C ad L, ita B E ad K habebit B M ad H rationem quadruplicatam eius, quam habet C ad A M, & B E ad K rationem quadruplicatam eius, quam habet C ad A E; sed quia A M æquatur quatuor ex quinque partibus datæ A B, vel quod idem est, est quadrupla ipsius M B. Dico H superare K.

Fiat

Fiat vt G ad H, ita L ad M; tum conſiderentur tres quantitates L, & G, & H, item aliæ tres L, & M, & K; ita, vt ratio L ad H ſit compoſita ex ratione L ad G, & ex ratione G ad H; ratio verò L ad K ſit compoſita ex ratione L ad M, & M ad K. Quia ab eadem C ſunt duæ ſeries continuè proportionalium C, & A M, & F, & P, & G; item C, & A E, & I, & Q, & L, habebit, per lemma ſecundum, L ad G quadruplicatam rationem eius, quam habet A E ad A M; ſed, ex lemmate vndecimo, B M ad B E habet maiorem rationem, quam ſit ratio quadruplicata A E ad A M; ergo B M ad B E habebit maiorem rationem, quam L ad G; ſed quia, per conſtructionem, vt C ad L, ita B E ad K, erit vt C ad B E, ita L ad K; item quia, per conſtructionem, vt C ad G; ita B M ad H erit, vt C ad B M; ita G ad H; ſed, vt G ad H, ita facta eſt L ad M; erit igitur L ad M, vt C ad B M; ſed quia vt C ad B E, ita L ad K erit M ad K, vt B M ad B E; ſed B M ad B E habet maiorem rationem, quam L ad G; ergo M ad K habebit maiorem rationem, quam L ad G: ſed quia vt G ad H, ita L ad M, erit, per rationem perturbatam, ratio L ad K maior, quam L ad H; ergo H ſuperat K, quod erit probandum.

PRO-

PROPOSITIO VIII. ZETETICA.

Inuenire maximum plano ſolidum, quod poſſit applicari dato plano deficiens quadrato cubo.

SIT datum B planum, & oporteat facere, quod imperatum eſt; ita ſecandum erit B planum, vt ſi ex altero ipſius ſegmento fiat quadratum, & ex latere huius effićti quadrati fiat cubus, quod fit ex reliquo plani in hunc effictum cubum ſit omnium maximum. Sit ſegmentum A quadratum, erit reliquum plani B planum minus A quadrato, quod ductum in A cubum producet plano ſolidum applicatum, ideſt B planum in A cubum, minus A quadrato cubo.

Sit ſecundo ſegmentum quadratum ex A plus E, & E æquetur nihilo; ideſt A quadratum plus duplici rectangulo ex A in E plus E quadrato; erit reliquum plani B planum, minus A quadrato minus duplici rectangulo ex A in E minus E quadrato, quod ductum in cubum ex A plus E, ideſt in cubum ex A plus triplici ſolido ex A quadrato in E plus triplici ſolido ex E quadrato in A plus E cubo, erit factum B planum in A cubum minus A quadrato cubo minus quintuplo A quadrato quadrato in E minus decuplo à cubo in E quadratum plus triplo B plano in A quadratum in E plus triplo B plano in E quadratum in A plus B plano in E cubum minus decuplo A quadrato in E cubum minus quintuplo E quadrato quadrato in A minus E quadrato cubo; Vnde ſi dematur ſuperius factum, ideſt

B pla-

B planum in A cubum minus A quadrato cubo, erit residuum triplum B planum in A quadratum in E plus triplo B plano in E quadratum in A plus B plano in E cubum minus quintuplo facto ex A quadrato quadrato in E minus decuplo facto ex A cubo in E quadratum minus decuplo facto ex A quadrato in E cubum minus quintuplo facto ex E quadrato quadrato in A minus E quadrato cubo; & si omnia applicentur ad E, & reseruatis ijs tantum, quæ ab E liberantur, & fiat Antithesis, erit triplum B planum in A quadratum æquale quintuplo quadrato quadrato ex A; & si vtraq; pars applicetur ad A quadratum, erit triplum B planum æquale quintuplo quadrato ex A, & tres partes ex quinque partibus B plani æquales erunt A quadrato; cum autem ex A quadrato efformari debeat quadrato cubus, qui sit defecturus, erit plano solidum, quod applicatur dato plano deficiens quadrato cubo id, quod applicatur reliquis duabus ex quinque partibus dati plani. Hinc Porisma

PORISMA.

Maximum plano solidum, quod applicatur dato plano deficiens quadrato cubo est id, quod applicatur duabus ex quinque partibus dati plani, & quadrato cubus, qui deficit occupat reliquas tres partes.

THEOREMA.

Omnium plano solidorum ad idem planum applicatorum, & deficientium plano solidis similibus, similiterq; positis maximum

est

est id, quod duabus ex quinque partibus dati plani applicatur.

SIT datum planum A B in D I, quinta autem pars ipsius A B sit A C, & A D sit ipsius A C tripla, erit B D æqualis duabus ex quinque partibus totius A B, & factum ex B D in D I erit æquale duabus ex quinque partibus dati plani. Fiat plano A B in D I æquale planum ex A Q in E L, & factum ex E A in E L sit simile facto ex A D in D I, & E F ad D G habeat triplicatam rationem eius, quam habet A E ad A D, erunt parallelepipeda ex

A D in D I in D G, & ex A E in E L in E F plano solida similia, similiterq; posita, & parallelepipeda ex B D in D G in D I, & ex Q E in E F in E L erunt plano solida eidem plano applicata deficientia plano solidis similibus, similiterq; positis; Plano solidum verò ex B D in D G in D I erit applicatum duabus ex quinque partibus dati plani, & plano solidum ex Q E in E F in E L erit applicatum parti maiori, quam

sint duæ ex quinque partibus dati plani. Quare
Dico primo plano solidum ex B D in D G in D I superare plano solidum ex Q E in E F in E L.

Analysis primæ partis.

QVia plano solidum ex B D in D G in D I supponitur superare plano solidum ex Q E in E F in E L, habebit factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L maiorem rationem, quam E F ad D G; sed factum ex Q E in E L est æquale facto ex A B in D I minus facto ex A E in E L, & E F ad D G est, vt cubus ex A E ad cubum ex A D, per constructionem; ergo factum ex B D in D I ad factum ex A B in D I minus facto ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam cubus ex A E ad cubum ex A D, & factum sub extremis superabit factum sub mediis; factum igitur ex B D in D I in cubum ex A D superabit factum ex A B in D I in cubum ex A E minus facto ex A E quadrato quadrato in E L; & si fiat Antithesis, erit factum ex A E quadrato quadrato in E L maius facto ex A B in D I in A E cubum, minus facto ex B D in D I in A D cubum, & quadrato quadratum ex A E ad factum ex A B in A E cubum minus facto ex B D in A D cubum habebit maiorem rationem, quam D I ad E L, idest A D ad A E, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; ergo quadrato cubus ex A E superabit factum ex A B in A D in A E cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum. Quia autem A E est æqualis triplæ A C minus D E, & A B est æqualis quintuplæ A C, &

A D

A D triplæ, si fiat interpretatio, ducenti quadraginta tres quadrato cubi ex A C minus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex ducentis septuaginta cubis ex A C in quadratum D E minus facto ex nonaginta quadratis ex A C in cubum D E plus facto ex quindecim A C in quadrato quadratum ex D E minus quadrato cubo ex D E superabunt ducentos quadraginta tres quadrato cubos ex A C minus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex centum triginta quinque cubis ex A C in D E quadratum minus facto ex quindecim quadratis ex A C in D E cubum; & si demantur communia, & fiat Antithesis; factum ex centum triginta quinque cubis ex A C in quadratum D E, vna cum facto ex quindecim A C in D E quadrato quadratum superabit factum ex septuaginta quinque quadratis ex A C in D E cubum plus quadrato cubo ex D E; & si omnia applicentur ad D E quadratum centum triginta quinque cubi ex A C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex D E in A C superabunt factum ex septuaginta quinque quadratis ex A C in D E vna cum cubo ex D E, quod patet ex sequenti lemmate.

L E M M A.

Datis duabus lineis; ita, vt altera deficiat à tripla alterius. Dico centum triginta quinque cubos ex prima, vna cum facto ex quindecim quadratis secundæ in primam superare factum ex

ſeptuaginta quinque quadratis primæ in ſecundam, vna cum cubo ex ſecunda.

Sint datæ duæ rectæ C, & E, & E deficiat à tripla C. Dico centum triginta quinque cubos ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C ſuperare factum ex ſeptuaginta quinque quadratis ex C in E, vna cum cubo ex E.

Plures caſus habet hęc propoſitio; aut E deficit à C, aut eſt æqualis, aut ſuperat C, ſed deficit ab ipſius dupla, aut eſt æqualis duplæ, aut ſuperat duplam, & deficit à tripla.

Sit primo E minor quam C, factum ex ſeptuaginta quinque quadratis ex C in E, vna cum cubo ex E deficiet à ſeptuaginta ſex cubis ex C; ergo multo magis à centum triginta quinque cubis ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C.

Sit ſecundo E æqualis C, erit factum ex ſeptuaginta quinque quadratis ex C in E, vna cum cubo ex E æquale ſeptuaginta ſex cubis ex C, ergo deficiet à centum triginta quinque cubis ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C.

Sit tertio E maior C, ſed minor dupla C, & ſupponatur æqualis C plus A, & C ſit maior A; erit aggregatum ex centum triginta quinque cubis ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C æquale aggregato ex centum quinquaginta cubis ex C, vna cum facto ex triginta quadratis ex C in A plus facto ex quindecim A quadratis in C; factum verò ex ſeptuaginta quinque quadratis ex C in E, vna cum cubo

ex

ex E erit æquale ſeptuaginta ſex cubis ex C, vna cum facto ex ſeptuaginta, & octo quadratis ex C in A plus triplo facto ex A quadrato in C plus A cubo; ſi igitur aggregatum ex centum quinquaginta cubis ex C, vna cum facto ex triginta quadratis ex C in A plus facto ex quindecim A quadratis in C comparetur aggregato ex ſeptuaginta ſex cubis ex C, vna cum facto ex ſeptuaginta octo quadratis ex C in A plus triplo facto ex A quadrato in C plus A cubo, & demantur vtrinq; communia, reſiduum primæ partis erit aggregatum ex ſeptuaginta quatuor cubis ex C, vna cum facto ex duodecim quadratis ex A in C, quod patet ſuperare reſiduum ſecundæ partis, ideſt aggregatum ex quadraginta, & octo quadratis ex C in A plus cubo ex A: Cum enim A deficiat à C hoc aggregatum deficiet à quadraginta nouem cubis ex C, ergo multò magis à ſeptuaginta quatuor cubis ex C, vna cum facto ex duodecim quadratis ex A in C.

Sit quarto E æqualis duplici C, erit aggregatum ex centum triginta quinque cubis ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C æquale centum nonaginta quinque cubis ex C, & aggregatum ex ſeptuaginta quadratis ex C in E, vna cum E cubo erit æquale centum quadraginta, & octo cubis ex C. Quare patet primum ſuperare poſtremum.

Sit vltimo E maior duplici C, ſed deficiat ab ipſius tripla; quare ſupponatur æqualis duplici C plus A, & C ſuperet A; erit aggregatum ex centum triginta quinque cubis ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C æquale aggregato ex centum nonaginta quinque

cubis

cubis ex C, vna cum facto ex ſexaginta quadratis ex C in A plus facto ex quindecim A quadratis in C; & aggregatum ex ſeptuaginta quinque quadratis ex C in E vna cum cubo ex E erit æquale aggregato ex centum quinquaginta, & octo cubis ex C plus facto ex octoginta ſeptem quadratis ex C in A plus facto ex ſex quadratis ex A in C plus cubo ex A. Primum igitur ſuperare poſtremum patet; nam ſi vtrinq; demantur cõmunia, reſiduũ primi erit aggregatũ ex triginta ſeptem cubis ex C, vna cũ facto ex nouẽ quadratis ex A in C; reſiduũ verò ſecundi erit aggregatum ex viginti ſeptem quadratis ex C in A, vna cum cubo ex A, quod deficit a viginti, & octo cubis ex C; nam C ſuperat A, ergo multo magis deficiet à triginta ſeptem cubis ex C, vna cum facto ex nouem quadratis ex A in C; vnde patet propoſitio. Sit igitur

Syntheſis primæ partis.

QVia D E deficit à tripla A C erit, per lemma ſuperius, aggregatum ex centum triginta quinque cubis ex A C, vna cum facto ex quindecim quadratis

dratis

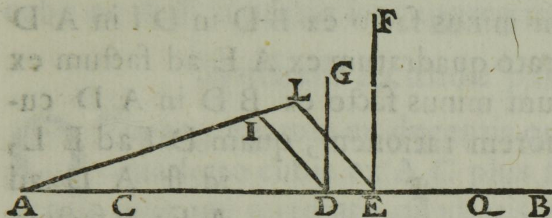
dratis ex D E in A C maius facto ex ſeptuaginta quinque quadratis ex A C in D E, vna cum cubo ex D E; & ſi omnia ducantur in D E quadratum, erit factum ex centum triginta quinque cubis ex A C in quadratum D E, vna cum facto ex quindecim A C in D E quadrato quadratum maius facto ex ſeptuaginta quinque quadratis ex A C in D E cubum plus quadrato cubo ex D E; & per Antitheſim aggregatum ex centum triginta quinque cubis ex A C in quadratum D E, vna cum facto ex quindecim A C in D E quadrato quadratum minus quadrato cubo ex D E ſuperabit factum ex ſeptuaginta quinque quadratis ex A C in D E cubum; & ſi vtrique parti addantur ducenti quadraginta tres quadrato cubi ex A C minus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex centum triginta quinque cubis ex A C in D E quadratum minus facto ex nonaginta quadratis ex A C in D E cubum; aggregatum ex ducentis quinquaginta tribus quadrato cubis ex A C minus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex ducentis ſeptuaginta cubis ex A C in quadratum D E minus facto ex nonaginta quadratis ex A C in cubum D E plus facto ex quindecim A C in quadrato quadratum ex D E minus quadrato cubo ex D E ſuperabit aggregatum ex ducentis quadraginta tribus quadrato cubis ex A C minus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex centum triginta quinque cubis ex A C in D E quadratum minus facto ex quindecim quadratis ex A C in D E cubum; ideſt

ſi fiat

si fiat interpretatio, vt A E sit æqualis triplæ A C minus D E, & A B sit æqualis quintuplæ A C, & A D triplæ; erit quadrato cubus ex A E maior facto ex A B in A D in A E cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum: Quare quadrato quadratum ex A E ad factum ex A B in A E cubum minus facto ex B D in A D cubum habebit maiorem rationem, quam A D ad A E, idest, quam D I ad E L; ergo factum ex A E quadrato quadrato in E L superabit factum ex A B in D I in A E cubum minus facto ex B D in D I in A D cubum; & si fiat Antithesis, factum ex B D in D I in A D cubum superabit factum ex A B in D I in A E cubum minus facto ex A E quadrato quadrato in E L; Ergo factum ex B D in D I ad factum ex A B in D I minus facto ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam cubus ex A E ad cubum ex A D; sed factum ex A B in D I minus facto ex A E in E L est æquale facto ex Q E in E L; nam D I in A B æquatur facto ex E L in A Q; &, vt cubus ex A E ad cubum ex A D, ita E F ad D G; habebit igitur factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L maiorem rationem, quam habeat E F ad D G; ergo factum sub extremis superabit factum sub medijs; factum igitur ex B D in D I in D G superabit factum ex Q E in E L in E F, idest plano solidum applicatum duabus ex quinque partibus dati plani superabit plano solidum applicatum parti maiori, quam sint duæ ex quinque partibus dati plani, simili existente vtriusque defectu, quod erat primo loco demonstrandum.

Sit

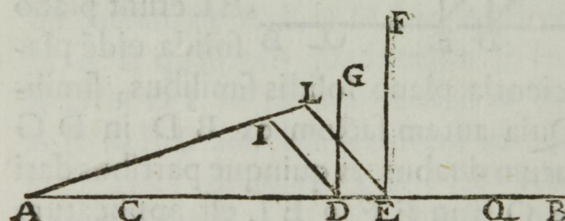
Sit ſecundo datum planum A B in D I, cuius quinta pars ſit A C in D I, & A D ſit tripla ipſius A C; B D verò æquet reliquas duas quintas partes, & plano A B in D I ſit æquale planum E L in A Q, & A E ſuperet A D, & ſint ſimiles figuræ A E in E L, & A D in D I, &, vt cubus ex A D ad cubum ex A E, ita ſit D G ad E F; erunt parallelepipeda ex A D in D G in D I, & ex A E in E F in E L plano ſolida ſimilia, & facta ex B D in D G in D I, & ex Q E in E F in E L erunt plano ſolida eidẽ plano applicata deficientia plano ſolidis ſimilibus, ſimiliterque poſitis. Quia autem factum ex B D in D G in D I eſt applicatum duabus ex quinque partibus dati plani, & factum ex Q E in E F in E L eſt applicatum parti minori, quam ſint duæ ex quinque partibus dati plani. Dico ſecundo factum ex B D in D G in D I ſuperare factum ex Q E in E F in E L. Sit igitur



Analyſis ſecundæ partis.

QVia factum ex B D in D G in D I ſupponitur ſuperare factum ex Q E in E F in E L, habebit factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L maiorem rationem, quam habeat E F ad D G; ſed factum ex Q E in E L eſt æquale facto ex A B in D I minus facto ex A E in E L; & E F ad D G eſt, vt cubus ex A E ad cubum ex A D per conſtructionem; Ergo

factum ex B D in D I ad factum ex A B in D I minus facto ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam cubus ex A E ad cubum ex A D; & factum sub extremis superabit factum sub medijs; factum igitur ex B D in D I in cubum ex A D superabit factum ex A B in D I in cubum ex A E minus facto ex A E quadrato quadrato in E L; & si fiat Antithesis, erit factum ex A E quadrato quadrato in E L maius facto ex A B in D I in A E cubum minus facto ex B D in D I in A D cubum; & quadrato quadratum ex A E ad factum ex A B in A E cubum minus facto ex B D in A D cubum habebit maiorem rationem, quam D I ad E L, idest A D ad A E; & factum sub extremis superabit factum sub medijs; ergo quadrato cubus ex A E superabit factum ex A B in A D in A E cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum.



Quia autem A E est æqualis triplæ A C plus D E, & A B est æqualis quintuplæ A C, & A D triplæ; si fiat interpretatio, erit quadrato cubus ex A E æqualis aggregato ex ducentis quadraginta tribus quadrato cubis ex A C plus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex ducentis septuaginta cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex nonaginta quadratis ex A C in D E cubum plus facto ex quindecim A C in D E quadrato quadratum plus quadrato cubo ex D E; & factum ex A B

in

in A D in A E cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum, facta interpretatione, erit æquale aggregato ex ducentis quadraginta tribus quadrato cubis ex A C plus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex centum triginta quinque cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex quindecim quadratis ex A C in D E cubum. Patet autem aggregatum æquale quadrato cubo ex A E ſuperare hoc aggregatum; Quare ſit

Syntheſis ſecundæ partis.

QVia aggregatum ex ducentis quadraginta tribus quadrato cubis ex A C plus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex ducentis ſeptuaginta cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex nonaginta quadratis ex A C in D E cubum plus facto ex quindecim A C in D E quadrato quadratum plus quadrato cubo ex D E ſuperat aggregatum ex ducentis quadraginta tribus quadrato cubis ex A C plus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex centum triginta quinque cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex quindecim quadratis ex A C in D E cubum; ideſt, facta interpretatione (quia tripla A C plus D E eſt æqualis A E, & quintuplæ A C eſt æqualis A B, & triplæ A C eſt æqualis A D) & quadrato cubus ex A E ſuperabit factum ex A B in A D in A E cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum; Idcircò quadrato quadratum ex A E ad factum ex A B in A E cubum minus facto

ex B D in A D cubum habebit maiorem rationem, quam A D ad A E, ideſt, quam D I ad E L; & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs; factum igitur ex A E quadrato quadrato in E L ſuperabit factum ex A B in D I in A E cubum minus facto ex B D in D I in A D cubum; & facta Antitheſi factum ex B D in D I in A D cubum ſuperabit factum ex A B in D I in A E cubum minus facto ex A E quadrato quadrato in E L; & factum ex B D in D I ad factum ex A B in D I minus facto ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam cubus ex A E ad cubum ex A D, ſeù quam E F ad D G, & quia factum ex A B in D I eſt æquale facto ex A Q in E L, erit factum ex A B in D I minus facto ex A E in E L æquale facto ex E Q in E L; ergo factum ex B D in D I ad factum ex E Q in E L habebit maiorem rationem, quam E F ad D G, & conſequenter factum ex B D in D I in D G ſuperabit factum ex E Q in E L in E F, ideſt plano ſolidum applicatum duabus ex quinque partibus ſuperabit plano ſolidum applicatum parti minori, quam ſint duæ ex quinque partibus dati plani, ſimili exiſtente defectu; cum autem etiam demonſtratum ſit ſuperare applicatum parti maiori, quam ſint duæ ex quinque partibus dati plani, patet eſſe omnium maximum, quod ſumpſimus demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SI dentur duæ lineæ, quarum altera gerat vicem rationalis, altera verò poſſit datum planum, & quæratur tertia proportionalis poſita rationali prima, & ea, quæ poteſt da-

tum

tum planum ſecunda , tertia inuenta erit ſimilis dato plano, cuius ſegmenta ſimilia erunt ſegmentis dati plani , & medio loco proportionalis inter ſegmentum ſimilis dato plano , & rationalem erit ſimilis ei , quæ poteſt ſegmentum dati plani ; & ſi fiat , vt rationalis ad ſimilem ei , quæ poteſt ſegmentum dati plani , ita ſimilis ſegmento dati plani ad aliam , hæc quarto loco inuenta erit ſimilis cubo eius, quæ poteſt ſegmentum dati plani ; & factum ex ſimili alteri ſegmento dati plani in hanc erit ſimile plano ſolido ; ſi autem fiat , vt rationalis ad quartam prius inuentam, ita ſimilis alteri ſegmento dati plani ad aliam , hæc erit ſimilis plano ſolido deficienti quadrato cubo ; nam, vt rationalis ad ſimilem ſegmento dati plani, ita ſimilis cubo eius, quæ poteſt alterum ſegmentum dati plani ad aliam ; cum autem rationalis ad ſimilem ſegmento dati plani habeat duplicatam rationem eius, quam habet ad eam, quæ poteſt alterum ſegmentum ; hinc fit , vt exurgat quadrato cubus ; ſed , ne dum breuis eſſe laboro obſcurus nimium fiam hæc vlterius dilucidemus .

Sint datæ duæ lineæ A , & B , & A gerat vicem rationalis ; B verò poſſit datum planum ; ſi fiat , vt A ad B, ita B ad C plus D , erit C plus D ſimilis dato plano , & C, & D erunt ſimiles ſegmentis dati plani .

Si iterum fiat vt A ad E , ita E ad C , & C ad F, erit E ſimilis ei, quæ poteſt ſegmentum dati plani, cui ſimilis eſt C, & F erit ſimilis cubo ipſius E , ſeù cubo facto ex latere quadrati æqualis ſegmento dati plani in idem quadratum. Si igitur fiat, vt A ad C, ita F ad aliam, erit hæc vltima ſimilis quadrato cubo ex E ; & ſi fiat , vt A ad D , quæ eſt ſimilis alteri ſegmento, ita F ad aliam v. g. H, hæc erit ſimilis plano ſolido applicato dato plano cum defectu quadrato

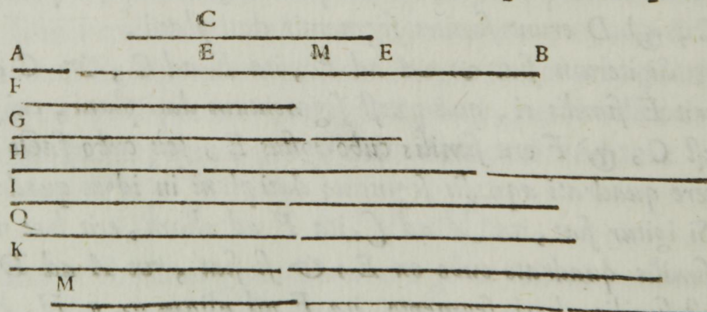
cubi.

cubi. Quia autem A ad F habet rationem sesquiplicatam eius, quam habet A ad C; & , vt A ad F, ita D ad H, habebit D ad H rationem sesquiplicatam eius, quam habet A ad C. Hinc fit, vt eadem superior propositio per lineas homologas, data rationali aptè proponatur, & demonstretur sequenti propositione: ideò sit

Eadem propositio proposita, & demonstrata per lineas homologas data rationali.

Datis duabus rectis lineis, quarum altera non secta se habeat loco rationalis, altera verò secta sit vtcunq, & alterum ipsius segmentum habeat ad aliam lineam rationem sesquiplicatam eius, quam habet non secta ad alterum segmentum. Dico hanc fore omnium maximam, quando segmentum ad quod refertur non secta erit æquale tribus ex quinque partibus datæ rectæ sectæ, vel fuerit sesquialterum alterius segmenti.

IT data rationalis C, & altera A B, quæ prius secetur in M; ita vt A M sit sesquialtera ipsius



M B: secundo, vtcunque in E; ita, vt B E sit maior,

aut

aut minor ipſa B M, & inter C, & A M inueniatur medio loco proportionalis F, &, vt C ad F, ita fiat A M ad G; ita, vt ſint continuè proportionales C, & F, & A M, & G; vt autem C ad G, ita fiat B M ad H; Quia C ad G habet ſeſquiplicatam rationem eius, quam habet ad A M, habebit B M ad H ſeſquiplicatam rationem eius, quam habet C ad A M.

Fiat iterum inter C, & A E media proportionalis I, & vt C ad I, ita A E ad Q: ita, vt ſint continuè proportionales C, & I, & A E, & Q, vt autem C ad Q ita fiat B E ad K, habebit C ad Q ſeſquiplicatam rationem eius, quam habet ad A E; Quare B E ad K ſeſquiplicatam rationem habebit eius, quam habet C ad A E, & quia A M eſt ſeſquialtera ipſius B M. Dico H ſuperare K.

Fiat, vt G ad H, ita Q ad M; tum conſiderentur tres quantitates Q, & G, & H; item aliæ tres Q, & M, & K; ita, vt ratio Q ad H ſit compoſita ex ratione Q ad G, & ex ratione G ad H: ratio verò Q ad K ſit compoſita ex ratione Q ad M, & M ad K. Quia ab eadem C ſunt duæ ſeries continuè proportionalium C & F, & A M, & G; item C, & I, & A E, & Q, habebit Q ad G ſeſquiplicatam rationem eius, quam habet A E ad A M; ſed ex lemmate duodecimo B M ad B E habet maiorem rationem, quam ſit ratio ſeſquiplicata A E ad A M; ergo B M ad B E habebit maiorem rationem, quam Q ad G: ſed quia, per conſtructionem, vt C ad Q, ita B E ad K, erit vt C ad B E, ita Q ad K: Item quia, per conſtructionem, vt C ad G, ita B M ad H, erit vt C ad B M, ita G ad H:

ſed

ſed vt G ad H, ita facta eſt Q ad M, erit igitur Q ad M, vt C ad B M; & quia, vt C ad B E, ita Q ad K, erit M ad K, vt B M ad B E; ſed B M ad B E habet maiorem rationem, quam Q ad G; ergo M ad K habebit maiorem rationem, quam Q ad G; ſed quia, vt G ad H, ita Q ad M, erit per rationem perturbatam ratio Q ad K maior, quam Q ad H: ergo H ſuperat K, quod erat probandum.

PROPOSITIO IX. ZETETICA.

Inuenire maximum plano ſolidum, quod poſſit applicari dato ſolido deficiens quadrato cubo.

SIT datum B ſolidum, & oporteat facere, quod imperatum eſt; ita erit ſecandum B ſolidum; vt ſi alterum ipſius ſegmentum effingatur in cubum, quod fit ex reliquo ſolidi in quadratum huius effecti cubi ſit maximum omnium eorum, quæ fieri poſſint ſi quomodocunque aliter ſecetur ſolidum datum.

Sit igitur ſegmentum A cubus, erit reliquum B ſolidum minus A cubo, quod ductum in A quadratum producet plano ſolidum applicatum B ſolido in A quadratum minus A quadrato cubo.

Sit ſecundo ſegmentum cubus ex A plus E, & E æquetur nihilo, ideſt cubus ex A plus triplici ſolido ex A quadrato in E plus triplici ſolido ex E quadrato in A plus cubo ex E; erit reliquum B ſolidum minus cubo ex A minus triplici ſolido ex A quadrato in E

minus

minus triplici solido ex E quadrato in A minus E cubo, quod ductum in quadratum ex A plus duplici facto ex A in E plus E quadrato producet factum ex B solido in A quadratum plus duplici facto ex B solido in A in E plus facto ex B solido in E quadratum minus A quadrato cubo minus quintuplo facto ex A quadrato quadrato in E minus decuplo facto ex A cubo in E quadratum minus decuplo facto ex E cubo in A quadratum minus quintuplo facto ex A in E quadrato quadratum minus E quadrato cubo.

Vnde si detrahatur prius factum ex B solido in A quadratum minus A quadrato cubo, & reliquum applicetur ad E, & reiectis ijs, quæ ex E non liberantur, fiat Antithesis; erit duplex factum ex B solido in A æquale quintuplo quadrato quadrato ex A, & si omnia applicentur quinque A, etiam A cubus æquabitur duabus ex quinque partibus B solidi; sed cum ex A cubo efformari debeat A quadrato cubus, erit plano solidum applicatum dato solido deficiens quadrato cubo id, quod applicabitur reliquis tribus ex quinque partibus dati solidi. Hinc

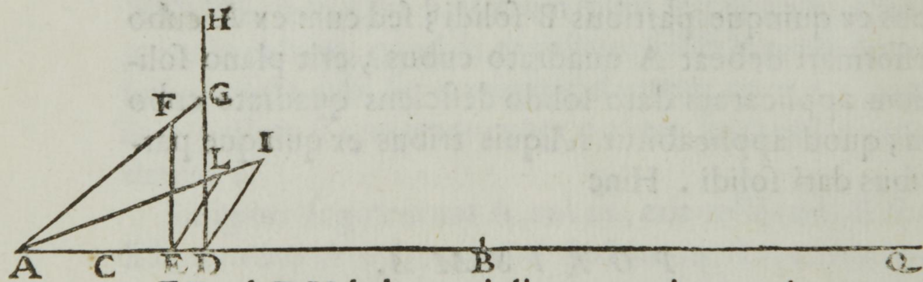
PORISMA.

Maximum plano solidum, quod applicatur dato solido deficiens quadrato cubo est id, quod applicatur tribus ex quinque partibus dati solidi, & quadrato cubus, qui deficit occupat reliquas duas partes.

THEOREMA.

Omnium plano solidorum ad idem solidum applicatorum,& deficientium plano solidis similibus, similiterque positis maximum est, id quod tribus ex quinque partibus dati solidi applicatur.

SIT datum solidum ex A B in D I in D G; quinta autem pars ipsius A B sit A C, & A D ipsius A C sit dupla; erit B D æqualis tribus ex quinque partibus totius A B; & factum ex B D in D I in D G erit æquale tribus ex quinque partibus dati solidi; fiat solido ex A B in D I in D G æquale solidum ex A Q in E L in E F, & factum ex E A in E L in E F sit simile facto ex A D in D G in D I;



& E F ad D H habeat triplicatam rationem eius, quam habet E F ad D G, seù rationis A E ad A D; erunt parallelepipeda ex A D in D I in D H, & ex A E in E F in E L plano solida similia, similiterq; posita; & parallelepipeda ex B D in D H in D I, & ex Q E in E F in E L erunt plano solida eidem solido applicata deficientia plano solidis similibus, similiterq; positis.

Plano ſolidum verò ex B D in D H in D I erit applicatum tribus ex quinque partibus dati ſolidi, & plano ſolidum ex Q E in E F in E L erit applicatum parti maiori, quam ſint tres ex quinque partibus dati ſolidi. Quare

Dico primo plano ſolidum ex B D in D H in D I ſuperare plano ſolidum ex Q E in E F in E L.

Analyſis primæ partis.

QVia plano ſolidum ex B D in D H in D I ſupponitur ſuperare plano ſolidum ex Q E in E F in E L; habebit factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L maiorem rationem, quam E F ad D H; ideſt per conſtructionem, quam cubus ex E F ad cubum ex D G; igitur factum ex B D in D I in cubum ex D G ſuperabit factum ex Q E in E L in cubum ex E F; factum igitur ex B D in D I in D G ad factum ex Q E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam quadratum ex E F ad quadratum ex D G; ſed quia factum ex A Q in E L in E F eſt æquale facto ex A B in D I in D G, erit factum ex Q E in E L in E F æquale facto ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F: Quamobrem factum ex B D in D I in D G ad factum ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam quadratum ex E F ad quadratum ex D G; idcircò factum ex B D in D I in D G cubum ſuperabit factum ex A B in D I in D G in E F quadratum minus facto ex A E in E L in E F cubum; & per Antitheſim factum ex A E in E L in E F cubum

ſuperabit factum ex A B in D I in D G in E F quadratum minus facto ex B D in D I in D G cubum; & factum ex A E in E L in E F quadratum ad factum ex A B in D I in E F quadratum minus facto ex B D in D I in D G quadratum habebit maiorem rationem, quam D G ad E F, ideſt, quam A D ad A E; ergo factum ex A E quadrato in E L in E F quadratum ſuperabit factum ex A D in A B in D I in E F quadratum minus facto ex A D in B D in D I in D G quadratum, & factum ex A E quadrato in E F quadratum ad factum ex A D in A B in E F quadratum minus facto ex A D in B D in D G quadratum habebit maiorem rationem, quam D I ad E L, ideſt A D ad A E; & factum ex A E cubo in E F quadratum ſuperabit factum ex A D quadrato in A B in E F quadratum minus facto ex A D quadrato in B D in D G quadratum; & facta Antitheſi factum ex A D quadrato in B D in D G quadratum ſuperabit factum ex A D quadrato in A B in E F quadratum minus facto ex A E cubo in E F quadratum; & factum ex A D quadrato in B D ad factum ex A D quadrato in A B minus cubo ex A E habebit maiorem rationem, quam E F quadratum ad quadratum D G, ideſt

quam A E quadratum ad quadratum A D; ergo factum ex A D quadrato quadrato in B D superabit factum ex A D quadrato in A B in A E quadratum minus quadrato cubo ex A E; & si fiat interpretatio, vt A D sit æqualis duplæ A C, & B D triplæ A C, & A B quintuplæ A C, & A E duplæ A C minus D E. Quadraginta, & octo quadrato cubi ex A C superabunt quadraginta, & octo quadrato cubos ex A C minus facto ex sexaginta cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex quadraginta quadratis ex A C in D E cubum minus facto ex decupla A C in D E quadrato quadratum plus quadrato cubo ex D E; & si fiat Antithesis erit factum ex sexaginta cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex decupla A C in D E quadrato quadratum maius facto ex quadraginta quadratis ex A C in D E cubum plus D E quadrato cubo; & si omnia applicentur ad D E quadratum, sexaginta cubi ex A C, vna cum facto ex decupla A C in D E quadratum superabunt factum ex quadraginta quadratis ex A C in D E plus D E cubo; Quod patet ex sequenti lemmate.

L E M M A.

Si fuerint duæ rectæ, & alterius dupla superet alteram. Dico sexaginta cubos ex prima, vna cum facto ex decupla prima in quadratum secundæ superare factũ ex quadraginta quadratis primæ in secundã, plus cubo secundæ.

Int duæ rectæ C, & E, & dupla C superet E. Dico sexaginta cubos

cubos ex C, vna cum facto ex decupla C in E quadratum ſuperare factum ex quadraginta quadratis ex C in E plus E cubo.

Aut enim E deficit à C, aut eſt æqualis, aut maior; ſi deficiat, aut ſit æqualis patet propoſitio; nam ſemper factum ex quadraginta quadratis ex C in E plus E cubo non excedet ſummam quadraginta vnius cubi ex C; ergo deficiet à ſexaginta cubis ex C plus facto ex decupla C in E quadratum.

Sit vltimo E maior C, ſed minor dupla C, & ſupponatur E æqualis C plus A, & C ſuperare A; erit E quadratum æquale quadrato ex C plus duplici facto ex C in A plus A quadrato, & cubus ex E erit æqualis cubo ex C plus triplici facto ex C quadrato in A plus triplici facto ex A quadrato in C plus C cubo, & factum ex quadraginta quadratis ex C in E erit æquale quadraginta cubis ex C plus facto ex quadraginta quadratis ex C in A; & idcircò ſexaginta cubi ex C, vna cum facto ex decupla C in E quadratum æquabuntur ſeptuaginta cubis ex C plus facto ex viginti quadratis ex C in A plus facto ex decupla C in A quadratum; factum verò ex quadraginta quadratis ex C in E, vna cum E cubo erit æquale quadraginta, & vni cubo ex C plus facto ex quadraginta tribus quadratis ex C in A plus facto ex tribus quadratis ex A in C plus A cubo; Et ſi comparentur ſeptuaginta cubi ex C plus facto ex viginti quadratis ex C in A plus facto ex decupla C in A quadratum cum quadraginta, & vno cubo ex C plus facto ex quadraginta tribus quadratis ex C in A plus facto ex tribus quadratis ex A in C plus A cubo;

& ſi

& si vtrinq; demantur communia, remanebunt ex altera parte viginti nouem cubi ex C, vna cum facto ex septem C in A quadratum ; & ex altera factum ex viginti tribus quadratis ex C in A plus A cubo ; idest, quia A superat C, minus, quam viginti quatuor cubi ex C ; ergo multo minus, quam viginti nouem cubi ex C, vna cum facto ex septem C in A quadratum ; ergo sexaginta cubi ex C , vna cum facto ex decupla C in E quadratum superant factum ex quadraginta quadratis ex C in E plus E cubo ; ideò sit

Synthesis primæ partis .

QVia dupla A C superat D E , per lemma superius, sexaginta cubi ex A C, vna cum facto ex decupla A C in D E quadratum superabunt factum ex quadraginta quadratis ex A C in D E plus D E cubo ; & si omnia ducantur in D E quadratum, factum ex sexaginta cubis ex A C in D E quadratum, vna cum facto ex decupla A C in D E quadrato quadratum superabit factum ex quadraginta quadratis ex A C in D E cubum plus D E quadrato cubo ; si vtrique parti addantur quadraginta, & octo quadrato cubi ex A C ; aggregatum ex quadraginta, & octo quadrato cubis ex A C plus facto ex sexaginta cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex decupla A C in D E quadrato quadratum superabit aggregatum ex quadraginta, & octo quadrato cubis ex A C plus facto ex quadraginta quadratis ex A C in D E cubum plus D E quadrato cubo ; & facta Antithesi quadraginta, & octo quadrato cubi ex A C superabunt quadraginta, & octo

qua-

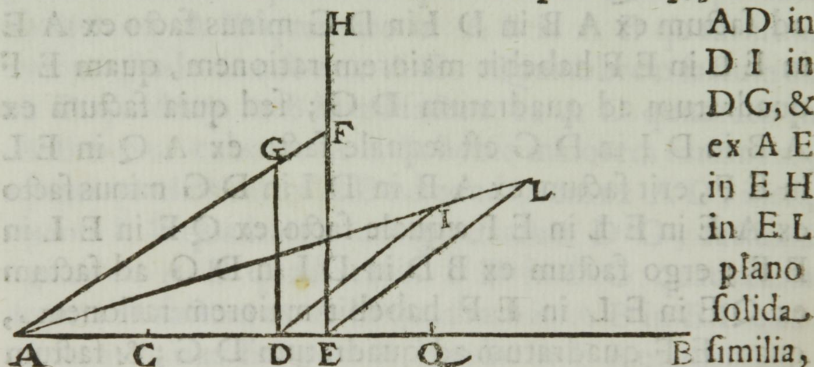
quadrato cubos ex A C minus facto ex sexaginta cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex quadraginta quadratis ex A C in D E cubum minus facto ex decupla A C in D E quadrato quadratum plus quadrato cubo ex D E; idest (facta interpretatione, vt A D sit æqualis duplæ A C, & B D triplæ A C, & A B quintuplæ A C, & A E duplæ A C minus C E) factum ex A D quadrato quadrato in B D superabit factum ex A D quadrato in A B in A E quadratum minus quadrato cubo ex A E. Quamobrem factum ex A D quadrato in B D ad factum ex A D quadrato in A B minus cubo ex A E habebit maiorem rationem, quam quadratum ex A E ad quadratum ex A D, idest, quam E F quadratum ad quadratum D G; factum igitur ex A D quadrato in B D in D G quadratum superabit factum ex A D quadrato in A B in E F quadratum minus facto ex A E cubo in E F quadratum; & per Antithesim factum ex A E cubo in E F quadratum superabit factum ex A D quadrato in A B in E F quadratum minus facto ex A D quadrato in B D in D G quadratum; & factum ex A E quadrato in E F quadratum ad factum ex A D in A B in E F quadratum minus facto ex A D in B D in D G quadratum habebit maiorem rationem, quam A D ad A E, idest, quam D I ad E L, & factum ex A E quadrato in E F quadratum in E L superabit factum ex A D in A B in D I in E F quadratum minus facto ex A D in B D in D I in D G quadratum; Quare factum ex A E in E F quadratum in E L ad factum ex A B in D I in E F quadratum minus facto ex B D in D I in D G quadratum

dratum

dratum habebit maiorem rationem, quam A D ad A E, ideſt, quam D G ad E F; & factum ex A E in E L in E F cubum ſuperabit factum ex A B in D I in D G in E F quadratum minus facto ex B D in D I in D G cubum; & per Antitheſim, factum ex B D in D I in D G cubum ſuperabit factum ex A B in D I in D G in E F quadratum minus facto ex A E in E L in E F cubum; Quamobrem factum ex B D in D I in D G ad factum ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam E F quadratum ad quadratum D G; ſed quia factum ex A B in D I in D G eſt æquale facto ex A Q in E L in E F, erit factum ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F æquale facto ex Q E in E L in E F; ergo factum ex B D in D I in D G ad factum ex Q E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam E F quadratum ad quadratum D G; & factum ex B D in D I in D G cubum ſuperabit factum ex Q E in E L in E F cubum. Quare factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habebit maiorem rationem, quam E F cubus ad cubum D G, ſed E F cubus ad cubum D G, per conſtructionem, eſt vt E F ad D H; Ergo factum ex B D in D I in D H ſuperabit factum ex Q E in E L in E F, ideſt plano ſolidum applicatum tribus ex quinque partibus dati ſolidi ſuperabit plano ſolidum applicatum parti maiori, quam ſint tres ex quinque partibus dati ſolidi cum ſimili defectu, quod ſumpſimus primo loco demonſtrandum.

Sit ſecundo datum ſolidum ex A B in D I in D G; quinta autem pars ipſius A B ſit A C, & A D ipſius

A C ſit dupla, erit B D æqualis tribus ex quinque partibus totius A B; & factum ex B D in D I in D G erit æquale tribus ex quinque partibus dati ſolidi. Fiat ſolido A B in D I in D G æquale ſolidum ex A Q in E L in E F, & factum ex E A in E L in E F ſit ſimile facto ex A D in D G in D I, & D G ad E H habeat triplicatam rationem eius, quam habet D G ad E F, ſeu rationis A D ad A E; erunt parallelepipeda ex A D in D I in D G, & ex A E in E H in E L plano ſolida ſimilia,



ſimiliterq; poſita; & parallelepipeda ex B D in D G in D I, & ex Q E in E H in E L erunt plano ſolida eidem ſolido applicata deficientia plano ſolidis ſimilibus, ſimiliterq; poſitis: Plano ſolidum verò ex B D in D G in D I erit applicatum tribus ex quinque partibus dati ſolidi, & plano ſolidum ex Q E in E H in E L erit applicatum parti minori, quam ſint tres ex quinque partibus dati ſolidi. Quare

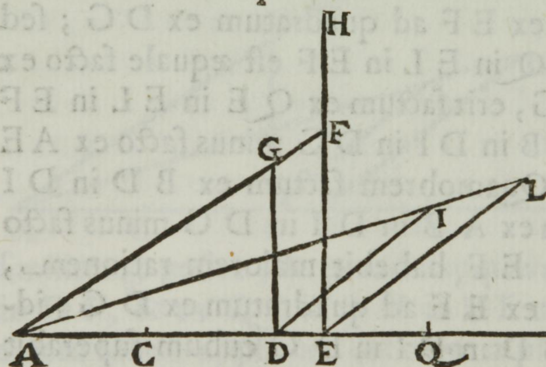
Dico ſecundo plano ſolidum ex B D in D G in D I ſuperare plano ſolidum ex Q E in E H in E L. Sit igitur

Ana-

Analysis secundæ partis.

QVia plano solidum ex B D in D G in D I supponitur superare plano solidum ex Q E in E H in E L; habebit factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L maiorem rationem, quam E H ad D G; idest per constructionem, quam habet cubus ex E F ad cubum ex D G; igitur factum ex B D in D I in cubum ex D G superat factum ex Q E in E L in cubum ex E F; factum igitur ex B D in D I in D G ad factum ex Q E in E L in E F habet maiorem rationem, quam quadratum ex E F ad quadratum ex D G; sed quia factum ex A Q in E L in E F est æquale facto ex A B in D I in D G, erit factum ex Q E in E L in E F æquale facto ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F: Quamobrem factum ex B D in D I in D G ad factum ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam quadratum ex E F ad quadratum ex D G; idcirco factum ex B D in D I in D G cubum superabit factum ex A B in D I in D G in E F quadratum minus facto ex A E in E L in E F cubum; & per Antithesim, factum ex A E in E L in E F cubum superabit factum ex A B in D I in D G in E F quadratum minus facto ex B D in D I in D G cubum; & factum ex A E in E L in E F quadratum ad factum ex A B in D I in E F quadratum minus facto ex B D in D I in D G quadratum habebit maiorem rationem, quam D G ad E F, idest quam A D ad A E; ergo factum ex A E quadrato in E L in E F quadratum superabit

factum ex A D in D I in A B in E F quadratum minus facto ex A D in B D in D I in D G quadratum; & factum ex A E quadrato in E F quadratum ad factum ex A D in A B in E F quadratum minus facto ex A D in B D in D G quadratum habebit maiorem rationem, quam D I ad E L, ideſt A D ad A E; ergo factum ex A E cubo in E F quadratum ſuperabit factum ex A D quadrato in A B in E F quadratum minus facto ex A D quadrato in B D in D G quadratum; & facta Antitheſi, erit factum ex A D quadrato in B D in D G quadratum maius facto ex A D quadrato in A B in E F quadratum minus facto ex A E cubo in E F quadratum; & factum ex A D quadrato in B D ad factum ex A D quadrato in A B minus cubo ex A E habebit maiorem rationem, quam E F quadratum ad quadratum D G, ideſt, quam A E quadratum ad quadratum A D; ergo factum ex A D quadrato quadrato in B D ſuperabit factum ex A D quadrato in A B in A E quadratum minus quadrato cubo ex A E; & per Antitheſim quadrato cubus ex A E ſuperabit factum ex A D quadrato in A B in A E quadratum minus facto ex A D quadrato quadrato in B D; Et ſi fiat inter-



pre-

pretatio, vt A E sit æqualis duplici A C plus D E, & A D sit æqualis duplici A C, & D B triplici A C, & A B quintuplæ A C; aggregatum ex triginta duobus quadrato cubis ex A C plus facto ex octoginta quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex octoginta cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex quadraginta cubis ex D E in A C quadratum plus facto ex decupla A C in D E quadrato quadratum plus quadrato cubo ex D E superabit aggregatum ex triginta duobus quadrato cubis ex A C plus facto ex octoginta quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex viginti cubis ex A C in D E quadratum, quod patet. Quare sit

Synthesis secundæ partis.

QVia aggregatum ex triginta duobus quadrato cubis ex A C plus facto ex octoginta quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex octoginta cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex quadraginta cubis ex D E in A C plus facto ex decupla A C in D E quadrato quadratum plus quadrato cubo ex D E superat aggregatum ex triginta duobus quadrato cubis ex A C plus facto ex octoginta quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex viginti cubis ex A C in D E quadratum; & si fiat interpretatio, vt A E sit æqualis duplici A C plus D E, & A D sit æqualis duplici A C, & D B triplici A C, & A B quintuplici A C; quadrato cubus ex A E superabit factum ex A D quadrato in A B in A E quadratum minus facto ex A D quadrato quadrato in B D; &

facta Antithesi, factum ex A D quadrato quadrato in B D superabit factum ex A D quadrato in A B in A E quadratum minus quadrato cubo ex A E. Quare factum ex A D quadrato in B D ad factum ex A D quadrato in A B minus cubo ex A E habebit maiorem rationem, quam quadratum ex A E ad quadratum ex A D, idest quam E F quadratum ad quadratum D G, & factum ex A D quadrato in B D in D G quadratum superabit factum ex A D quadrato in A B in E F quadratum minus facto ex cubo A E in E F quadratum; & per Antithesim, factum ex cubo A E in E F quadratum superabit factum ex A D quadrato in A B in E F quadratum minus facto ex A D quadrato in B D in D G quadratum; & factum ex quadrato A E in E F quadratum ad factum ex A D in A B in E F quadratum minus facto ex A D in B D in D G quadratum habebit maiorem rationem, quam A D ad A E, idest quam D I ad E L; ergo factum ex A E quadrato in E F quadratum in E L superabit factum ex A D in D I in A B in E F quadratum minus facto ex A D in B D in D I in D G quadratum; & factum ex A E in E L in E F quadratum ad factum ex A B in D I in E F quadratum minus facto ex B D in D I in D G quadratum habebit maiorem rationem, quam A D ad A E, idest D G ad E F; & factum ex A E in E L in E F cubum superabit factum ex A B in D I in E F quadratum in D G minus facto ex B D in D I in D G cubum; & per Antithesim, factum ex B D in D I in D G cubum superabit factum ex A B in D I in E F quadratum in D G minus facto ex A E

in

in E L in E F cubum ; & factum ex B D in D I in D G ad factum ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam E F quadratum ad D G quadratum ; sed quia factum ex A Q in E L in E F est æquale facto ex A B in D I in D G, erit factum ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F æquale facto ex Q E in E L in E F: Quare factum ex B D in D I in D G ad factum ex Q E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam E F quadratum ad D G quadratum ; & factum ex B D in D I in D G cubum superabit factum ex Q E in E L in E F cubum : Quamobrem factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habebit maiorem rationem, quam E F cubus ad cubum D G ; sed, vt E F cubus ad cubum D G, ita est ex constructione E H ad D G ; ergo factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habebit maiorem rationem, quam E H ad D G ; & factum ex B D in D I in D G superabit factum ex Q E in E L in E H, idest plano solidum applicatum tribus ex quinque partibus dati solidi superabit plano solidum applicatum parti minori, quam sint tres ex quinque partibus dati solidi simili existente defectu ; cum verò etiam demonstratum sit superare id, quod est applicatum parti maiori, quam sint tres ex quinque partibus dati solidi, hinc patet esse omnium maximum, quod erat demonstrandum.

SCHO-

SCHOLIVM.

SI dentur duæ lineæ, quarum altera gerat vicem rationalis, altera verò possit datum solidum, & quæratur quarta proportionalis posita rationali prima, & ea, quæ potest datum solidum secunda, quarta inuenta erit similis dato solido, cuius segmenta similia erunt segmentis dati solidi, & prima duarum medio loco proportionalium inter rationalem, & segmentum similis dato solido erit similis ei, quæ potest cubum æqualem segmento dati solidi; secunda verò duarum medio loco proportionalium inter rationalem, & segmentum similis dato solido erit similis quadrato eius, quæ potest cubum æqualem segmento dati solidi, & rationalis ad hanc habebit rationem subsesquiplicatam eius rationis, quam habet ad similem segmento dati solidi; & si fiat vt rationalis ad hanc, ita similis reliquo segmento dati solidi ad aliam, erit hæc vltimo loco inuenta similis plano solido applicato dato solido cum defectu quadrato cubi; Quare in id recidet quæstio, vt data rationali, & simili dato solido similis dato solido ita secetur, vt si fiat alterum segmentum similis dato solido ad aliam in ratione subsesquiplicata rationis, quam habet rationalis ad alterum segmentum hæc sit omnium maxima. Hinc fit vt eadem superior propositio per lineas homologas data rationali aptè proponatur, & demonstretur sequenti propositione; Ideo sit

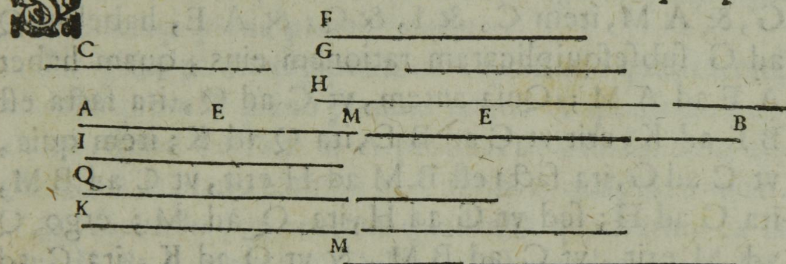
Eadem propositio proposita, & demonstrata per lineas homologas data rationali.

Datis duabus rectis lineis, quarum altera non secta se habeat loco rationalis; altera verò

secta

secta sit vtcunque, & alterum ipsius segmentum habeat ad aliam rectam lineam rationem subsesquiplicatam eius, quam habet non secta ad alterum segmentum. Dico hanc fore omnium maximam, quando segmentum, ad quod refertur non secta erit æquale duabus ex quinque partibus datæ rectæ, vel fuerit subsesquialterum alterius segmenti.

SIT data rationalis C, & altera A B, quæ prius



secetur in M; ita, vt A M sit subsesquialtera ipsius M B; secundo, vtcunq; in E; ita vt B E sit maior, aut minor ipsa B M, & inter C, & A M supponantur duæ mediæ proportionales F, & G; ita, vt sint continuè proportionales C, & F, & G, & A M; vt autem C ad G; ita fiat B M ad H. Quia C ad G habet rationem subsesquiplicatam eius, quam habet ad A M, habebit B M ad H rationem subsesquiplicatam eius, quam habet C ad A M.

Supponantur iterum inter C, & A E duæ mediæ proportionales I, & Q; ita vt sint continuè propor-

 tionales

tionales C, & I, & Q, & A E; vt autem C ad Q, ita fiat B E ad K, habebit C ad Q subsesquiplicatam rationem eius, quam habet C ad A E; Quare B E ad K habebit rationem subsesquiplicatam eius, quam habet C ad A E; & quia A M est subsesquialtera ipsius B M. Dico H superare K.

Fiat vt G ad H, ita Q ad M, & considerentur tres quantitates Q, & G, & H; item aliæ tres Q, & M, & K, erit ratio Q ad H composita ex ratione Q ad G, & G ad H; ratio vero Q ad K erit composita ex ratione Q ad M, & M ad K; & quia ab eadem C sunt duæ series continuè proportionalium C, & F, & G, & A M, item C, & I, & Q, & A E, habebit Q ad G subsesquiplicatam rationem eius, quam habet A E ad A M; Quia autem, vt C ad Q, ita facta est B E ad K, erit vt C ad B E, ita Q ad K; item quia, vt C ad G, ita facta est B M ad H erit, vt C ad B M, ita G ad H; sed vt G ad H, ita Q ad M; ergo Q ad M erit, vt C ad B M, & vt Q ad K, ita C ad B E; ergo M ad K erit, vt B M ad B E: sed per lemma decimum tertium, B M ad B E habet maiorem rationem, quam sit ratio subsesquiplicata A E ad A M, idest quam sit ratio Q ad G, & G ad H habet eandem rationem, quam habet Q ad M; ergo per Analogiam perturbatam Q ad K habebit maiorem rationem, quam Q ad H, ergo H superat K, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO X. ZETETICA.

Inuenire maximum plano solidum, quod possit applicari dato plano plano deficiens quadtato cubo.



IT datum B plano planum, & oporteat facere, quod imperatum est; ita erit secandum B plano planum; vt si ex altero ipsius segmento efficiatur quadrato quadratum, quod fit ex reliquo plano plani in latus dicti quadrato quadrati sit maximum omnium eorum, quæ fieri possint, si quomodocunque aliter secetur plano planum datum.

Sit igitur primo segmentum A quadrato quadratum, erit reliquum B plano planum minus A quadrato quadrato, quod ductum in A producet plano solidum applicatum B plano planum in A minus A quadrato cubo.

Sit secundo segmentum quadrato quadratum ex A plus E, & E æquetur nihilo; idest quadrato quadratum ex A plus quadruplo plano plano ex A cubo in E plus sextuplo plano plano ex A quadrato in E quadratum plus quadruplo plano plano ex A in E cubum plus E quadrato quadrato; erit reliquum B plano planum minus A quadrato quadrato minus quadruplo plano plano ex A cubo in E minus sextuplo plano plano ex A quadrato in E quadratum minus quadruplo plano plano ex A in E cubum minus E quadrato quadrato; quod ductum in A, plus E producet factum ex B plano plano in A plus facto ex B plano plano in E minus quadrato cubo ex A minus facto ex quintuplo A qua-

 drato

drato quadrato in E minus facto ex decuplo A cubo in E quadratum minus facto ex decuplo A quadrato in E cubum minus quintuplo facto ex A in E quadrato quadratum minus E quadrato cubo . Vnde si detrahatur prius factum ex B plano plano in A minus A quadrato cubo, & reliquum applicetur ad E, & reiectis ijs, quæ ex E non liberantur, fiat reliqui Antithesis; erit quintuplum A quadrato quadratum æquale B plano plano; &, si vtraq; pars quintupartiatur, erit A quadrato quadratum æquale quintæ parti B plano plani; & cum ex A quadrato quadrato effingi debeat quadrato cubus, erit plano solidum applicatum dato plano plano deficiens quadrato cubo id, quod applicatur reliquis quatuor ex quinque partibus dati plano plani . Hinc

PORISMA.

Maximum plano solidum, quod applicatur dato plano plano deficiens quadrato cubo est id, quod applicatur quatuor ex quinq; partibus dati plano plani, & quadrato cubus, qui deficit occupat reliquam quintam partem .

THEOREMA.

Omnium plano solidorum ad idem plano planum applicatorum & deficientium plano solidis similibus, similiterq; positis maximum est id, quod quatuor ex quinq;partibus dati solidi applicatur.

SIT primo datum parallelepipedum ex A B, in D I, in D G datum plano planum, & quinta pars ipsius A B sit A D, erit B D æqualis

quatuor

quatuor ex quinque partibus totius A B, & factum ex B D in D I in D G erit æquale quatuor ex quinque partibus dati parallelepipedi; fiat parallelepipedo ex A B in D I in D G æquale parallelepipedum ex A Q in E L in E F, ea lege, vt factum ex E A in E L sit simile facto ex A D in D I; sed E F ad D G habeat duplicatam rationem eius, quam habet A E ad A D, erunt parallelepipeda ex A E in E F in E L, & ex A D in D I in D G plano plana similia; fiat iterum, vt A E ad A D, ita D G ad D H, erunt parallelepipeda ex A E in E F in E L, & ex A D in D H in D I plano solida similia, similiterq; posita; & parallelepipeda ex D B in D I in D H, & ex E Q in E L in E F erunt plano solida eidem plano plano applicata deficientia plano solidis similibus, similiterq; positis; & parallelepipedum ex D B in D I in D H erit applicatum quatuor ex quinque partibus dati plano plani; parallelepipedum verò ex E Q in E L in E F erit applicatum parti maiori, quam sint quatuor ex quinque partibus dati plano plani simili existente defectu. Dico primo plano solidum ex D B in D I in D H superare plano solidum ex E Q in E L in E F.

Analysis primæ partis.

QVia plano solidum ex D B in D I in D H supponitur superare plano solidum ex E Q in E L in E F, habebit factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L maiorem rationem, quam E F ad D H; idest, per constructionem, quam cubus ex A E ad cubum ex A D; sed cubus ex A E est id, quod fit ex

A E quadrato in A E, & cubus ex A D est id, quod fit ex A D quadrato in A D, &, vt A E quadratum ad A D quadratum, ita E F ad D G; ergo vt cubus ex A E ad cubum ex A D, ita erit factum ex A E in E F ad factum ex A D in D G; Quare factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A D in D G; ergo factum ex B D in D I in A D in D G superabit factum ex Q E in E L in A E in E F; sed, quia per constructionem factum ex A Q in E L in E F est æquale facto ex A B in D I in D G, erit factum ex Q E in E L in E F æquale facto ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F; quare, facta interpretatione, factum



ex B D in D I in A D in D G superabit factum ex A B in D I in D G in A E minus facto ex A E quadrato in E L in E F; & facta Antithesi, factum ex A E quadrato in E L in E F superabit factum ex A B in D I in D G in A E minus facto ex B D in D I in A D in D G, & factum ex A E quadrato in E L ad factum ex A B in D I in A E minus facto ex B D in D I in A D habebit maiorem rationem, quam D G ad A F, idest, quam A D quadratum ad A E quadratum per constructionem; ergo factum ex A E quadrato quadrato in E L superabit factum ex A B in D I in A E in A D quadratum minus facto ex B D in D I

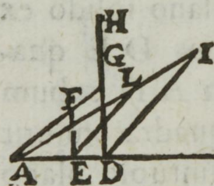
in

in A D cubum, & A E quadrato quadratum ad factum ex A B in A E in A D quadratum minus facto ex B D in A D cubum habebit maiorem rationem, quam D I ad E L, ideſt, quam A D ad A E; & A E quadrato cubus ſuperabit factum ex A B in A E in A D cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum. Fiat interpretatio, vt A E ſit æqualis A D minus D E, & A B ſit æqualis quintuplæ A D, & B D ſit æqualis quadruplæ A D; erit quadrato cubus ex A E æqualis quadrato cubo ex A D minus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E plus decuplo plano ſolido ex A D cubo in D E quadratum minus decuplo plano ſolido ex A D quadrato in D E cubum plus quintuplo plano ſolido ex A D in D E quadrato quadratum minus D E quadrato cubo, & factum ex A B in A E in A D cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum erit æquale A D quadrato cubo minus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E; ergo aggregatum ex quadrato cubo ex A D minus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E plus decuplo plano ſolido ex A D cubo in D E quadratum minus decuplo plano ſolido ex A D quadrato in D E cubum plus quintuplo plano ſolido ex A D in D E quadrato quadratum minus D E quadrato cubo ſuperabit A D quadrato cubum minus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E; & ſi fiat Antitheſis, & demantur communia, decuplum plano ſolidum ex A D cubo in D E quadratum plus quintuplo plano ſolido ex A D in D E quadrato quadratum ſuperabit

perabit decuplum plano ſolidum ex A D quadrato in D E cubum plus D E quadrato cubo. Vtraq; pars applicetur ad D E quadratum; decuplus cubus ex A D plus quintuplo ſolido ex A D in D E quadratum ſuperabit decuplum ſolidum ex A D quadrato in D E plus D E cubo, quod patet, quia A D ſuperat D E; Quare ſit

Synthesis primæ partis.

QVia A D ſuperat D E decuplus cubus ex A D plus quintuplo ſolido ex A D in D E quadratum ſuperabit decuplum ſolidum ex A D quadrato in D E plus cubo ex D E; &, ſi vtraq; pars ducatur in D E quadratum; decuplum plano ſolidum ex A D cubo in D E quadratum plus quintuplo plano ſolido ex A D in D E quadrato quadratum ſuperabit decuplum plano ſolidum ex A D quadrato in D E cubum plus D E quadrato cubo; ſi vtriq; parti addatur A D quadrato cubus minus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E; aggregatum ex quadrato cubo ex A D minus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E plus decuplo plano ſolido ex A D cubo in D E quadratum plus quintuplo plano ſolido ex A D in D E quadrato quadratum ſuperabit aggregatum ex A D quadrato cubo minus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E plus decuplo plano ſolido ex A D quadrato



drato in D E cubum plus D E quadrato cubo ; & per Antithesim, aggregatum ex quadrato cubo ex A D minus quintuplo plano solido ex A D quadrato quadrato in D E plus decuplo plano solido ex A D cubo in D E quadratum minus decuplo plano solidoex A D quadrato in D E cubum plus quintuplo plano solido ex A D in D E quadrato quadratum minus D E quadrato cubo superabit aggregatum ex A D quadrato cubo minus quintuplo plano solido ex A D quadrato quadrato in D E ; ideſt, facta interpretatione, vt A D minus D E sit æqualis A E, & quintupla A D sit æqualis A B, & quadrupla A D sit æqualis B D; Quadrato cubus ex A E superabit factum ex A B in A E in A D cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum; Quare A E quadrato quadratum ad factum ex A B in A E in A D quadratum minus facto ex B D in A D cubum habebit maiorem rationem, quam A D ad A E, ideſt quam D I ad E L ; & factum ex A E quadrato quadrato in E L superabit factum ex A B in A E in A D quadratum in D I minus facto ex B D in A D cubum in D I; quare factum ex A E quadrato in E L ad factum ex A B in D I in A E minus facto ex B D in D I in A D habebit maiorem rationem, quam A D quadratum ad A E quadratum, ideſt, per conſtructionem, quam D G ad E F; & factum ex A E quadrato in E L in E F superabit factum ex A B in D I in A E in D G minus facto ex B D in D I in A D in D G, & facta Antitheſi factum ex B D in D I in A D in D G superabit factum ex A B in D I in A E in D G minus facto ex A E quadrato in E L in E F; ſed quia, per conſtructionem, factum ex A Q

in E L in E F eſt æquale facto ex A B in D I in D G, erit factum ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F æquale facto ex Q E in E L in E F. Quare facta interpretatione, factum ex B D in D I in A D in D G ſuperabit factum ex Q E in E L in E F in A E, & factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A D in D G; ſed, vt E F ad D G, ita A E quadratum ad A D quadratum; quare factum ex A E in E F ad factum ex A D in D G erit, vt A E cubus ad A D cubum; idcircò factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habebit maiorem rationem, quam cubus ex A E ad cubum ex A D, ideſt per conſtructionem, quam E F ad D H; ergo factum ex B D in D I in D H ſuperabit factum ex Q E in E L in E F; ideſt plano ſolidum, quod applicatur quatuor ex quinque partibus dati plano plani ſuperabit plano ſolidum, quod applicatur parti maiori, quam ſint quatuor ex quinque partibus dati plano plani ſimili exiſtente defectu, quod ſumpſimus primo loco demonſtrandũ.

Sit ſecundo datum parallelepipedum ex A B in D I in D G datum plano planum, & quinta pars ipſius A B ſit A D, erit B D æqualis quatuor ex quinque partibus totius A B, & factum ex B D in D I in D G erit ęquale quatuor ex quinque partibus dati parallelepipedi; fiat parallelepipedo ex A B in D I in D G æquale parallelepipedum ex A Q in E L in E F, ea lege, vt factum ex E A in E L ſit ſimile facto ex A D

in

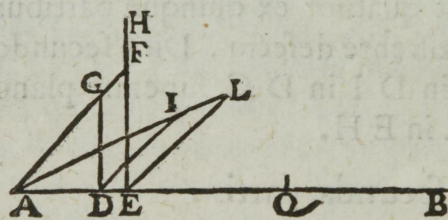
in D I; ſed E F ad D G habeat duplicatam rationem eius, quam habet A E ad A D, erunt parallelepipeda ex A E in E F in E L, & ex A D in D I in D G plano plana ſimilia; fiat autem, vt A D ad A E, ita E F ad E H; erunt parallelepipeda ex A E in E H in E L, & ex A D in D I in D G plano ſolida ſimilia, ſimiliterq; poſita, & parallelepipeda ex B D in D I in D G, & ex E Q in E L in E H erunt plano ſolida eidem plano plano applicata deficientia plano ſolidis ſimilibus, ſimiliterq; poſitis; & parallelepipedum ex D B in D I in D G erit applicatum quatuor ex quinque partibus dati plano plani; parallelepipedum verò ex E Q in E L in E H erit applicatum parti minori, quam ſint quatuor ex quinque partibus dati plano plani ſimili exiſtente defectu. Dico ſecundo plano ſolidum ex B D in D I in D G ſuperare plano ſolidum ex E Q in E L in E H.

Analyſis ſecundæ partis.

QVia plano ſolidum ex B D in D I in D G ſupponitur ſuperare plano ſolidum ex E Q in E L in E H, habebit factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L maiorem rationem, quam E H ad D G, ideſt per conſtructionem, quam cubus ex A E ad cubum ex A D; ſed cubus ex A E ad cubum ex A D habet rationem compoſitam ex A E ad A D, & ex quadrato A E ad quadratum A D, ideſt E F ad D G; ſed rationem compoſitam ex A E ad A D, & E F ad D G habet etiam factum ex A E in E F ad factum ex A D in D G; ergo factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habet maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A D in

 D G;

DG; ergo factum ex BD in DI in AD in DG superabit factum ex QE in EL in AE in EF; sed quia per constructionem factum ex AQ in EL in EF est æquale facto ex AB in DI in DG, erit factum ex QE in EL in EF æquale facto ex AB in DI in DG minus facto ex AE in EL in EF; Quare, facta interpretatione, factum ex BD in DI in AD in DG superabit factum ex AB in DI in DG in AE minus facto ex AE quadrato in EL in EF; & facta Antithesi, factum ex AE quadrato in EL in EF superabit factum ex AB in DI in DG in AE minus facto ex BD in DI in AD in DG; & factum ex AE quadrato in EL ad factum ex AB in DI in AE minus facto ex BD in DI in AD habebit maiorem rationē, quam DG ad EF; idest, quam AD quadratum ad AE quadratum per constructionem; Ergo



factum ex AE quadrato quadrato in EL superabit factum ex AB in DI in AE in AD quadratum minus facto ex BD in DI in AD cubum; & AE quadrato quadratū ad factum ex AB in AE in AD quadratum minus facto ex BD in AD cubum habebit maiorem rationem, quam DI ad EL; idest, quam AD ad AE; & AE quadrato cubus superabit factum ex AB in AE in AD cubum minus facto ex BD in AD quadrato quadratum. Fiat interpretatio vt AE sit æqualis AD plus DE, & AB sit æqualis quintuplæ AD, & BD sit æqualis quadruplæ AD, erit quadrato cubus ex AE æqualis aggregato ex quadrato cubo ex AD plus quintuplo plano solido ex

AD

A D quadrato quadrato in D E plus decuplo plano ſolido ex A D cubo, in D E quadratum plus decuplo plano ſolido ex A D quadrato in D E cubum plus quintuplo plano ſolido ex A D in D E quadrato quadratum plus D E quadrato cubo, quod aggregatum patet ſuperare aggregatum ex A D quadrato cubo plus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E, quod per interpretationem æquatur facto ex A B in A E in A D cubum, minus facto ex B D in A D quadrato quadratum; quare patet concluſio. Sit igitur

Syntheſis ſecundæ partis.

QVia quadrato cubus ex A D plus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E plus decuplo plano ſolido ex A D cubo in D E quadratum plus decuplo plano ſolido ex A D quadrato in D E cubum plus quintuplo plano ſolido ex A D in D E quadrato quadratum plus D E quadrato cubo ſuperat quadrato cubum ex A D plus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E; ideſt, ſi fiat interpretatio, vt A D plus D E ſit æqualis A E, & quintuplæ A D ſit ęqualis A B; quadruplæ verò A D ſit æqualis B D; quia quadrato cubus ex A E ſuperat factum ex A B in A E in A D cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum; habebit A E quadrato quadratum ad factum ex A B in A E in A D quadratum minus facto ex B D in A D cubum maiorem rationem, quam A D ad A E, ideſt D I ad E L; & factum ex A E quadrato quadrato in E L ſuperabit factum ex A B in D I in A E in A D quadratum minus facto ex B D in D I in A D cubum; Quare factum

ex A E quadrato in E L ad factum ex A B in D I in A E minus facto ex B D in D I in A D habebit maiorem rationem, quam A D quadratum ad A E quadratum; ideſt per conſtructionem, quam D G ad E F; & factum ex A E quadrato in E L in E F ſuperabit factum ex A B in D I in A E in D G minus facto ex B D in D I in A D in D G; & per Antitheſim, factum ex B D in D I in A D in D G ſuperabit factum ex A B in D I in A E in D G minus facto ex A E quadrato in E L in E F; ſed, quia per conſtructionem, factũ ex A B in D I in D G eſt æquale facto ex A Q in E L in E F; erit factum ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F æquale facto ex Q E in E L in E F; quare ſi fiat interpretatio, factum ex B D in D I in A D in D G ſuperabit factũ ex Q E in E L in E F in A E; ergo factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A D in D G, ſed factum ex A E in E F ad factum ex A D in D G habet rationem, compoſitam ex ratione A E ad A D, & E F ad D G; ideſt quadrati A E ad A D quadratum per conſtructionem; ſed hanc eandem rationem habet cubus ex A E ad cubum ex A D, ergo factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habebit maiorem rationem, quam A E cubus ad A D cubũ, ideſt, quam E H ad D G; ergo factum ex B D in D I in D G ſuperabit factum ex Q E in E L in E H, ideſt plano ſolidum applicatũ quatuor ex quinque partibus dati plano plani ſuperabit plano ſolidum, quod applicatur parti minori, quam ſint quatuor ex quinque partibus dati plano plani; cum autem etiam demonſtratum ſit ſuperare id, quod applicatur parti maiori, quam ſint quatuor ex quinque

par-

partibus simili existente defectu patet esse omnium maximum eorum, quæ applicari possint, quod proposuimus demonstrandum.

SCHOLIVM.

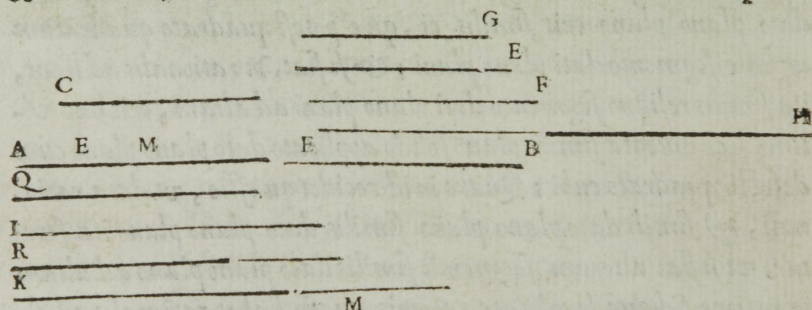
SI dentur duæ lineæ, quarum altera gerat vicem rationalis, altera verò possit datum plano planum, & quæratur quinta proportionalis posita rationali prima, & ea, quæ potest datum plano planum secunda, quinta inuenta erit similis dato plano plano, cuius segmenta similia erunt segmentis dati plano plani, & prima trium medio loco proportionalium inter rationalem, et segmentum similis dato plano plano erit similis ei, quæ potest quadrato quadratum æquale segmento dati plano plani; & si fiat, vt rationalis ad hanc, ita similis reliquo segmento dati plano plani ad aliam, erit hæc vltimo loco inuenta similis plano solido applicato dato plano plano cum defectu quadrato cubi; Quare in id recidet quæstio, vt data rationali, & simili dato plano plano similis dato plano plano ita secetur, vt si fiat alterum segmentũ similis dato plano plano ad aliam in ratione subquadruplicata rationis, quam habet rationalis ad alterum segmentum hæc sit omnium maxima. Hinc eadem superior propositio per lineas homologas data rationali aptè proponitur, & demonstratur sequenti propositione; ideò sit

Eadem propositio proposita, & demonstrata per lineas homologas data rationali.

Datis duabus rectis lineis, quarũ altera se habeat loco rationalis, altera verò secta sit vtcunque, & alterum ipsius segmentum habeat ad aliam rationem subquadruplicatam eius, quam habet

rationalis ad alterum segmentum. Hæc erit omnium maxima, quando segmentũ, ad quod refertur rationalis fuerit æquale quintæ parti datæ rectæ, vel fuerit subquadruplum alterius segmenti.

SIT data rationalis C, & altera A B, quæ prius secetur in M, vt A M sit quinta pars totius A B, & ideò subquadrupla ipsius B M. Secundo vtcunque in E; ita vt B E sit maior, aut minor ipsa B M, & inter C, & A M sint tres medio loco continuè pro-



portionales G, & E & F; ita vt sint quinque continuè proportionales C, & G, & E, & F, & A M; vt autem C ad G, ita fiat B M ad H; quia C ad G habet rationem subquadruplicatam eius, quam habet ad A M habebit B M ad H rationem subquadruplicatam eius, quam habet C ad A M. Supponantur iterum inter C, & A E tres mediæ continuè proportionale Q & I, & R, ita vt sint quinque continuè proportionales C, & Q, & I, & R, & A E; vt autem C ad Q, ita fiat B E ad K habebit C ad Q subquadruplicatam rationem eius, quam habet C ad A E; Quare B E ad K habebit rationem subquadru-

dru-

druplicatam eius, quam habet C ad A E; & quia A M est subquadrupla ipsius B M. Dico H superare K. Fiat, vt G ad H, ita Q ad M, & considerentur tres quantitates Q & G, & H, item aliæ tres Q & M, & K; erit ratio Q ad H composita ex ratione Q ad G, & G ad H; ratio verò Q ad K erit composita ex ratione Q ad M, & M ad K; & quia ab eadem C sunt duæ series continuè proportionalium C, & G, & E, & F, & A M, item C, & Q, & I, & R, & A E, habebit Q ad G subquadruplicatam rationem eius, quam habet A E ad A M, vt colligi potest ex lemmate secundo. Quia verò, vt C ad Q, ita facta est B E ad K, erit vt C ad B E, ita Q ad K, item quia, vt C ad G, ita facta est B M ad H, erit, vt C ad B M, ita G ad H; sed, vt G ad H, ita Q ad M; ergo Q ad M erit, vt C ad B M, &, vt Q ad K, ita C ad B E; ergo M ad K erit, vt B M ad B E; sed, per lemma decimum quartum, B M ad B E habet maiorem rationem, quam sit ratio subquadruplicata A E ad A M, idest quam sit ratio Q ad G, & G ad H habet eandem rationem, quam habet Q ad M; ergo per Analogiam perturbatam Q ad K habebit maiorem rationem, quam Q ad H; ergo H superat K, quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

IAM expeditæ sunt propositiones de applicationibus figurarum deficientium figura data specie vsq; ad solido solida, ex quibus euidens fit id, quod in Isagogicis diximus gradum figuræ applicandæ denominare multitudinem partium, in quas diuidenda est magnitudo, cui fit applicatio, & gradum magnitudinis, cui

fit

ſit applicatio numerare partes, quas occupat applicata magnitudo deficiens figura data ſpecie. Et hoc generaliter verum eſt; poſſunt enim ad ſolido ſolida, & vlteriora hæ propoſitiones produci eadem methodo, qua ſuperiores propoſitiones demonſtratæ ſunt; Quamobrem earum tantum propoſitionum, quæ ad ſolido ſolida ſpectant Elenchum ſubdam.

ELENCHVS.

Propoſitionum, quæ ſpectant ad applicationem ſolido ſolidorum datæ magnitudini deficientium ſolido ſolido dato ſpecie.

Maximum ſolido ſolidum, quod applicari poſſit datæ lineæ deficiens ſolido ſolido dato ſpecie eſt id, quod ſextæ parti datæ lineæ applicatur.

Eadem propoſitio data rationali per lineas homologas.

Duabus datis rectis lineis, quarum altera ſit rationalis non ſecta, altera verò ſecta vtcunque, & fiat alterum ſegmentum ſectæ ad aliam in ratione quintuplicata eius, quam habet rationalis ad alterum ſegmentum, hæc erit omnium maxima, quando ſegmentum, ad quod refertur non ſecta fuerit alterius quintuplum.

Maximum ſolido ſolidum, quod applicari poſſit dato plano deficiens ſolido ſolido dato ſpecie eſt id, quod applicatur duabus ex ſex partibus dati plani, ſeù tertiæ parti dati plani.

Eadem

Eadem propoſitio data rationali per lineas homologas.

Hæc propoſitio, vt demonſtretur per lineas homologas data rationali conuenit cum ea, quæ demonſtratur propoſitione ſecunda; nam ſi dato plano aſſimiletur linea, erit ſolido ſolidum ſimile ſolido; maximum autem ſolidum, quod applicatur datæ lineæ deficiens ſolido dato ſpecie eſſe id, quod applicatur tertiæ parti datæ lineæ docuimus propoſitione ſecunda, cui reſpondet propoſitio per lineas homologas.

Maximum ſolido ſolidum, quod applicatur dato ſolido deficiens ſolido ſolido dato ſpecie eſt id, quod applicatur tribus ex ſex partibus, ideſt dimidio dati ſolidi.

Huic reſpondet per lineas homologas data rationali, ea propoſitio, quæ reſpondet propoſitioni primæ; nam ſi ſolido aſſimiletur linea, ſolido ſolido erit ſimile planum.

Maximum ſolido ſolidum, quod applicatur dato plano plano deficiens ſolido ſolido dato ſpecie, eſt id, quod applicatur quatuor ex ſex partibus dati plano plani, ideſt duabus ex tertijs partibus dati plani.

Huic

Huic respondet propositio tertia cum sua propositione per lineas homologas; nam si plano plano assimiletur planum erit solido solidum simile solido, & maximum solidum, quod applicatur plano deficiens solido simili dato demonstratum est propositione tertia esse illud, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani.

Maximum solido solidum, quod applicatur plano solido deficiens solido solido dato specie est id, quod applicatur quinque ex sex partibus dati plano solidi.

Eadem propositio per lineas homologas proponitur.

Datis duabus rectis lineis, quarum altera sit rationalis non secta, altera verò secta vtcunque, & alterum ipsius segmentum habeat ad aliam rationem subquintuplicatam eius, quam habet rationalis ad alterum segmentum. Hæc erit omnium maxima, quando segmentum, ad quod refertur rationalis fuerit æquale sextæ parti datæ rectæ, vel fuerit alterius segmenti subquintuplum.

Et constanti hoc ordine procedunt altiorum magnitudinum applicationes in infinitum, & demonstrationes omnibus obuiæ erunt, qui superiora intellexerint.

FINIS.

